
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Р.Н. Кузьмин, Н.П. Савенкова, П.Б. Фроликов
(Москва)

ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ОТДЕЛЬНО ВЗЯТОГО РЕГИОНА

В статье предлагается способ введения непрерывных социальных переменных, позволяющих строить пространственно неоднородные модели динамики изменения социальной напряженности. Приводится сравнение результатов числовых расчетов пространственно однородной и пространственно неоднородной моделей, наглядно демонстрируются преимущества последней.

Ключевые слова: пространственно однородная модель, пространственно неоднородная модель, кластер, виртуальное пространство, непрерывная переменная, разностная схема, метод прямой прогонки.

Общий вид однородной и неоднородной моделей

Ниже предлагается модель, позволяющая выразить зависимость социальной напряженности (СН) в некотором отдельно взятом регионе от ряда действующих в этом регионе социально-эко-

Рунар Николаевич Кузьмин – академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ, директор Института синергетики РАН.

Надежда Петровна Савенкова – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник факультета ВМиК МГУ.

Павел Борисович Фроликов – студент V курса факультета ВМиК МГУ.

номических факторов. Авторы не претендуют на полноту модели, на то, что уже в предлагаемом варианте она может дать в руки социолога конкретный аппарат по расчету уровня СН. Напротив, необходимо подчеркнуть, что речь идет лишь о некоторой «канве», схеме, которая в дальнейшем должна наполняться определенным социологическим содержанием. Тем не менее, предлагаемая модель может быть весьма полезна для социологии, поскольку, на наш взгляд, она задает некоторое направление, в рамках которого возможна совместная работа социологов и математиков, цель которой – получение конструктивного механизма для измерения столь сложного явления, как СН (обзор подходов к пониманию и измерению СН см. [1]).

В основе предлагаемой модели находятся своего рода «аксиомы», описывающие «заложенное» в модель понимание авторами процесса формирования СН:

(1) регион является изолированной системой: никакие факторы извне не воздействуют на уровень СН; это предположение, конечно, редко реализуется практически, но его несоблюдение приводит к резкому усложнению модели;

(2) главным фактором, формирующим уровень СН и его изменение во времени, является воздействие на жителей региона совокупности происходящих в нем событий; обозначим это воздействие через S ; в данной модели глубоко не анализируются способы выявления тех событий, которые действительно воздействуют на СН, не идет речь и о способах оценки такого воздействия; о возникающих здесь проблемах и возможных подходах к их решению см., например, [2]; коротко будет описан лишь использованный модельный вариант соответствующих расчетов;

(3) регион можно разделить на части (области, подрегионы), в каждой из которых имеется свой средний уровень СН, который, собственно, мы и должны измерять – каждая часть является как бы единицей измерения; ниже будем считать эти части региона области отвечающими некоему территориальному делению после-

днего; но в действительности они могут и не быть связаны с географией: скажем, часть региона может состоять из живущей на его территории студенческой молодежи или сельских пенсионеров и т.д.;

(4) сила действия рассматриваемых событий на динамику СН, в свою очередь, определяется воздействием ряда других факторов, изменяющихся от области к области. Ниже в качестве такого фактора используется уровень обеспеченности каждой области средствами связи со «столицей» региона (предполагается, что именно через эти средства связи до жителей каждой области доходит информация о формирующемся уровне СН событиях). Этот уровень обозначим буквой q ;

(5) закон изменения СН от области к области может быть уподоблен закону растекания жидкости по неоднородной поверхности под воздействием некоторой вынуждающей силы (энтропии). При этом неоднородность задается функцией q , вынуждающая сила аналогична действию S . Изменение силы воздействия событий, вызывающих СН, от области к области (напомним, что указанное изменение объясняется действием функции q) может быть интерпретировано как диффузия S . Действует здесь и довольно сильное предположение, связанное с тем, что мы абстрагируемся от того, что число областей в регионе конечно, и рассматриваем q как непрерывную переменную.

В работах [3; 4] была предложена так называемая однородная модель изменения СН (модель основана на известном уравнении Навье–Стокса растекания жидкости):

$$\dot{x} = S - \frac{1}{T} \cdot x,$$

где x – СН, S – вынуждающая сила (энтропия), T – время релаксации (т.е. время, в течение которого вынуждающая сила воздействует на население области; действие любой силы, как правило, ограничено во времени). Здесь не принимались во внимание сформулированные выше положения (3) и (4). Считалось, что x и S

зависят только от времени:

$$x = x(t), S = S(t),$$

значение S является средним по всему региону. Наличие разнородных областей в регионе не предполагалось. Приведенный в названных работах численный расчет по этой модели иллюстрирует развитие напряженности x и вынуждающей силы S во времени при условии однородности рассматриваемого региона.

Разделение всего региона на качественно разнородные области, введение описывающего эту разнокачественность фактора q делает модель неоднородной. Предполагается, что происходящие в регионе события неодинаково воспринимаются жителями разных областей региона. И СН, и определяющее ее воздействие S зависят не только от времени, но и от упомянутого фактора:

$$x = x(t, q), S = S(t, q).$$

Более адекватным реальности представляется создание пространственно неоднородных динамических моделей вида:

$$\dot{x} = D \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + S - \frac{1}{T} \cdot x.$$

В уравнении появился новый член $-D \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}$, позволяющий учесть неоднородность региона по непрерывной переменной q . D – коэффициент диффузии ($D > 0$).

Пример расчета переменной, определяющей неоднородность модели

Предположим, что переменной, задающей неоднородность модели, является различие в состоянии средств связи между «столицей» региона и отдельными его областями. Измерять такую переменную можно по-разному. Предлагаемый нами способ измерения состоит в следующем: он носит приблизительный характер, авторы не занимались серьезными разработками шкалы.

Прежде всего выделим отдельные средства связи (дороги, железные дороги, наличие порта, аэропорта и т.д.) и в зависимости от состояния каждого из них в той или иной области припишем этой области число (балл) в соответствии с табл. 1 (в ней фигурируют 9 средств связи, каждое из которых может находиться в 3 или 4 состояниях).

Таблица 1

СРЕДСТВА СВЯЗИ И БАЛЛЫ, ПРИПИСЫВАЕМЫЕ ИХ СОСТОЯНИЯМ

Средство связи	Баллы			
	0	1	2	3
Дороги	Проселочная	Обычная	Магистральная связь с крупными городами.	
Железная дорога	Нет	Однколейка	Активнодействующая	
Порт	Нет	Местный	Крупный	
Аэропорт	Нет	Местный, военный	Крупный пассажирский	
Телевидение	Меньше 50%	Местное	Национального значения	Спутниковое
Радио	Нет	Местное	Национального значения	
Пресса	Нет	Местная	Национального значения	
Интернет	Нет	Есть		
Телефон	Меньше 50%	Местный	Городской	Международный

Итак, каждой области будет поставлена в соответствие последовательность из k (по числу рассматриваемых средств связи; в данном случае $k = 9$) чисел. Пусть i -й области отвечает последовательность (q_j^i, \dots, q_k^i) , а центру региона – последовательность (q_j^0, \dots, q_k^0) . В соответствии со сказанным выше, i -й области мы должны приписать число, выражающее расстояние от нее до центра региона, т.е. расстояние между указанными выше последовательностями. Его, как известно, можно вычислять различными методами [3]. Будем использовать самый распростра-

ненный – евклидово расстояние. Тогда i -й области приписется число q^i , равное:

$$q^i = \sqrt{\sum_{j=1}^k (q_j^0 - q_j^i)^2},$$

где k – количество рассматриваемых средств связи. Применение обычного евклидова расстояния может быть оправдано в том случае, когда все координаты изучаемых областей однородны по физическому смыслу и одинаково важны для решения поставленной задачи. Будем полагать, что это имеет место.

Таким образом, мы получили некоторое одномерное виртуальное пространство, заданное непрерывной социальной переменной q , отражающей близость каждой области к центру региона по фиксированным социальным характеристикам. Такое виртуальное пространство может быть и многомерным. Трудности здесь могут возникнуть в силу сложности решения соответствующих социологических задач: выявление факторов, детерминирующих и социальную напряженность вообще и вынуждающую силу (совокупность событий, происходящих в регионе), как мы уже отмечали, является непростой задачей.

Полагаем, что построенную шкалу можно считать интервальной, т.е. такой, для которой физически осмысленными являются отношения тождества и порядка как между числами-результатами измерения, так и между соответствующими числовыми интервалами. В таком случае становится возможным произвольный выбор начала отсчета шкальных значений. Поэтому без ограничения общности будем считать, что центр («столица») региона находится на нуле и разместим на оси q все объекты, заданные как точки нашего виртуального пространства. Нулю соответствует «столица», расстоянию q_s – объект (область региона), отстоящий от центра на расстояние q_s .

Итак, будем считать, что $x = x(q, t)$, и заменим пространственно однородную функцию $S(t)$ на пространственно неоднородную

$S = S(q, t)$ посредством интерполяции функции $S = S(q, t)$ на сегменте $[0, q_n]$ с помощью полинома Лагранжа:

$$S_L(q, t) = S_0(t) \frac{(q - q_2) \cdots (q - q_n)}{(q_0 - q_2) \cdots (q_0 - q_n)} + \cdots + S_n(t) \frac{(q - q_1) \cdots (q - q_{n-1})}{(q_n - q_1) \cdots (q_n - q_{n-1})}.$$

Исследование пространственно неоднородной модели

В начальный момент времени выбираем напряженность, исходя из результатов пространственно однородной модели: $x(q, 0) = \text{const}$. Единственным органом управления и исполнительной власти является столица, которая находится внутри заданного региона (система замкнута). Поэтому поток напряженности через границу региона равен нулю. Пространственно неоднородная модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = D \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + S - \frac{1}{T} \cdot x \\ x(q, 0) = \text{const} \\ \frac{\partial x}{\partial q}(0, t) = \frac{\partial x}{\partial q}(N, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Запишем разностную схему для (1). Будем использовать неявную схему, так как она абсолютно устойчива (о способах решения системы (1), в том числе о неявной разностной схеме и роли ее абсолютной устойчивости см. [5]).

$$\begin{cases} \frac{x_k^j - x_{k-1}^j}{\tau} = D \cdot \frac{x_k^{j+1} - 2x_k^j + x_k^{j-1}}{\Delta q^2} + S_k^j - \frac{1}{T_k} \cdot x_k^j; j = 0, \dots, n; k = 0, \dots, t \\ x_k^0 = x_k^1; x_k^{n-1} = x_k^n; x_0^j = \text{const} \\ j = 0, \dots, n; k = 0, \dots, t \end{cases} \quad (2)$$

Эта система решается прямым методом прогонки [5]:

$$\begin{cases} D > 0 \Rightarrow a_i = b_i = \frac{D}{\Delta q^2} > 0 \\ T > 0, \tau > 0 \Rightarrow |c_i| = \frac{2D}{\Delta q^2} + \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \geq \frac{2D}{\Delta q^2} = |a_i| + |b_i| \\ a_1 = 1, b_1 = 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что условия устойчивости прогонки для (2) всегда выполнены.

Предположим, что мы имеем три области A , B и C со значениями функции q , равными, соответственно, $q_1 = 4,236$, $q_2 = 6,472$, $q_3 = 7,292$. Будем считать, что в области A произошло больше событий, значительно влияющих на СН, и вынуждающая сила в этой

области равняется $\frac{5}{4}S$, где S – средняя напряженность в рассматриваемом регионе (напряженность, полученная при использовании однородной модели); в области B произошло больше событий, имеющих среднее влияние на СН, и вынуждающая сила в этом кластере равняется S ; в кластере C произошло больше событий, оказывающих небольшое влияние на СН, и вынуждающая сила в этом кластере равняется $\frac{3}{4}S$. Таким образом, средняя вынуждающая сила по региону, состоящему из трех областей A , B , C , равняется S .

Учитывая, что имеется три кластера A , B , C , которые могут находиться на расстоянии q_1 , q_2 , q_3 от «столицы», мы получаем шесть вариантов различного расположения кластеров относительно «столицы», каждому из которых соответствует свой график напряженности. При этом рис. 1.1 и 2.1 соответствуют варианту, когда A находится на расстоянии q_1 от центра, B – на расстоянии q_2 , C – на расстоянии q_3 ; рис. 1.2 и 2.2 соответствуют варианту,

когда A находится на расстоянии q_1 от центра, B – на расстоянии q_3 , C – на расстоянии q_2 ; рис. 1.3 и 2.3 соответствуют варианту, когда A находится на расстоянии q_2 от центра, B – на расстоянии q_1 , C – на расстоянии q_3 ; рис. 1.4 и 2.4 соответствуют варианту, когда A находится на расстоянии q_3 от центра, B – на расстоянии q_1 , C – на расстоянии q_2 ; рис. 1.5 и 2.5 соответствуют варианту, когда A находится на расстоянии q_2 от центра, B – на расстоянии q_3 , C – на расстоянии q_1 ; рис. 1.6 и 2.6 соответствуют варианту, когда A находится на расстоянии q_3 от центра, B – на расстоянии q_2 , C – на расстоянии q_1 .

Напомним, что наша система имеет два решения: $x = x(q, t)$ и $S = S(q, t)$. Для того, чтобы иметь возможность сопоставить решения для пространственно однородной и неоднородной моделей, зафиксируем момент времени. Например, будем считать, что $t = 5$, и сравним, какие сведения о регионе предоставляют нам упомянутые модели именно для этого момента времени.

Решение системы принимает вид:

$$x = x(q).$$

Несколько слов необходимо сказать о том, каким образом рассчитывалась функция

$$S = S(q).$$

Как мы отмечали выше, эта функция отражает воздействие на жителей региона совокупности происходящих в регионе событий. Модельный вариант оценки этой функции рассчитывался следующим образом.

На основе анализа СМИ был составлен список событий, которые имели место в регионе за последний год и, в соответствии с гипотезами исследователей, которые могли потенциально воздействовать на СН. С помощью экспертного опроса (использовался метод парных сравнений) этим событиям были приписаны веса. Далее при расчете значения S для какого-либо конкретного подрегиона выяснялось, какие именно события из упомянутого списка произошли в этом подрегионе за последний год (каждое

событие учитывалось столько раз, сколько оно имело место) и суммировались веса этих событий. Полученная сумма и служила значением вынуждающей силы, отвечающей рассматриваемому подрегиону.

На рис. 1.1–1.6 отражена зависимость $x = x(q)$, на рис. 2.1–2.6 – зависимость $S = S(q)$. Другими словами, на всех рисунках горизонтальная ось соответствует введенному выше расстоянию областей от центра (переменной q); вертикальная же на рис. 1.1–1.6 – CH (переменной x), а на рис. 2.1 – вынуждающей силе (переменной S).

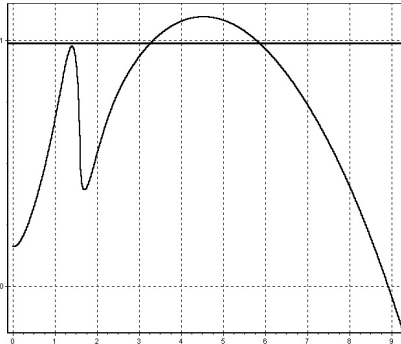


Рис. 1.1

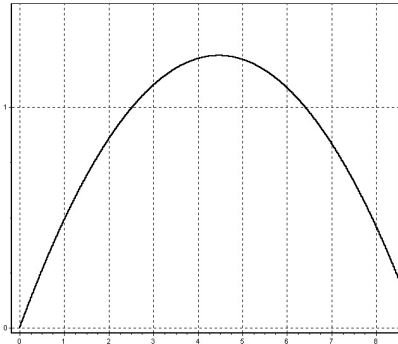


Рис. 2.1

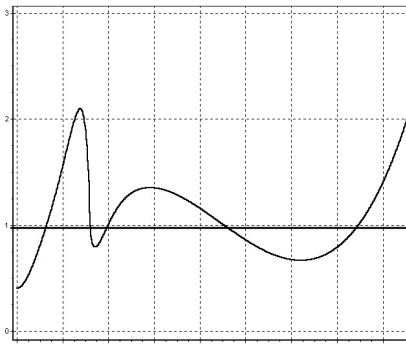


Рис. 1.2

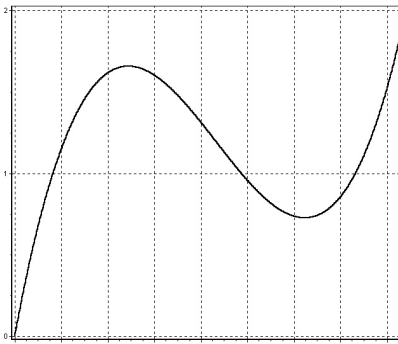


Рис. 2.2

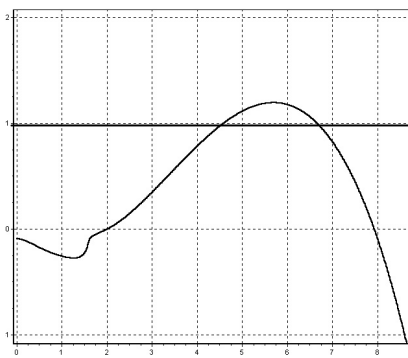


Рис. 1.3

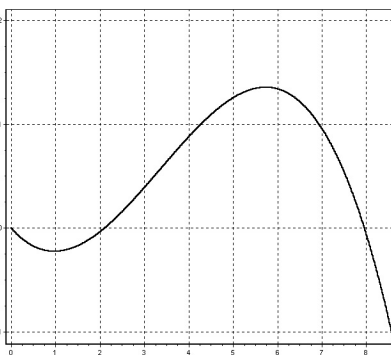


Рис. 2.3

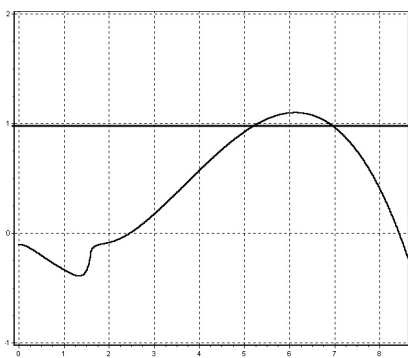


Рис. 1.4

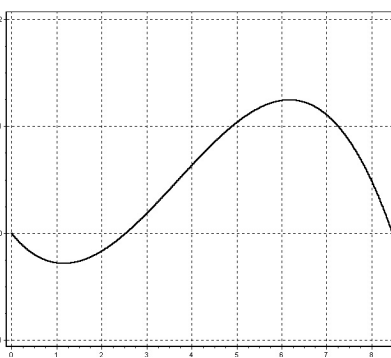


Рис. 2.4

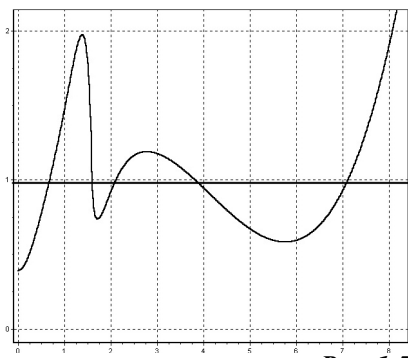


Рис. 1.5

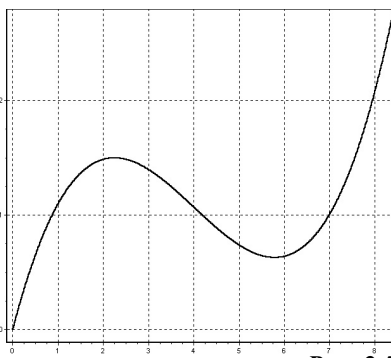


Рис. 2.5

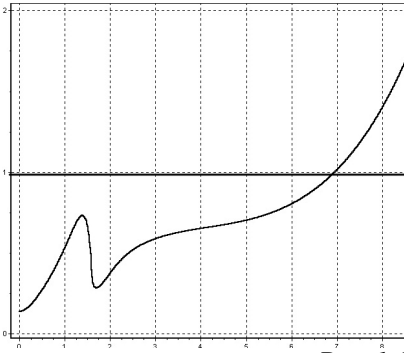


Рис. 1.6

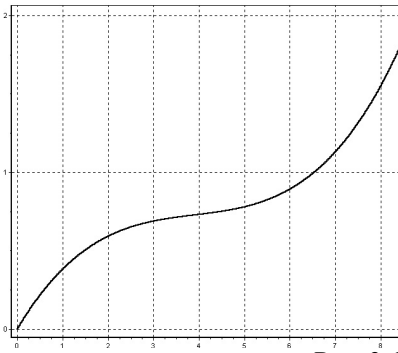


Рис. 2.6

Анализ численных расчетов пространственно неоднородной модели показывает, что она позволяет более гибко управлять динамическим процессом.

Горизонтальная черта на графиках (рис. 1.1–1.6) соответствует среднему по региону значению напряженности, равному 0,985, которое было найдено для момента времени $t = 5$ с помощью пространственно однородной модели. Рассмотрим рис. 1.1. Расчет по пространственно неоднородной модели показывает, что указанный уровень напряженности (0,985 и выше) на самом деле характерен только для тех областей, для которых q либо принадлежит отрезку $[3,3; q_2]$, либо равно 1,45 (правда, значение напряженности при $q = 1,45$ чуть меньше среднего уровня, $X = 0,978$). А в остальных областях уровень напряженности X гораздо меньше выделенного. Поэтому если считать, что этот уровень является критическим и требует специального управления ситуацией, можно сделать вывод о том, что основные ресурсы управления следует применить именно к тем объектам, напряженность которых находится внутри сегмента $[3,3; q_2]$ или равна 1,45. Ясно, что с помощью расчета на основе пространственно однородной модели не могут быть даны подобные рекомендации.

На рис. 1.2 заметен пик напряженности на сегменте $[0,7; 1,6]$, выявить который с помощью однородной модели тоже было не-

возможно. Применять к объектам, находящимся в этом сегменте, среднестатистическое управление неэффективно. Из ситуации можно сделать следующие выводы: максимальное количество средств управления целесообразно сосредоточить на объектах региона с напряженностью, находящейся на сегменте $[0; 1,6]$.

Рассмотренная ситуация также интересна тем, что на соответствующем графике вынуждающей силы S (рис. 2.2) никаких пиков на выделенном сегменте не видно. Фактически мы нашли значение S , когда при низком значении вынуждающей силы (ситуация кажется стабильной) на самом деле напряженность в районе большая и требует дополнительных ресурсов управления.

Ситуация на рис. 1.3 похожа на ситуацию, изображенную на рис. 1.1. Только если в случае, отраженном на рис. 1.1, при $q = 1,45$ напряженность X практически приблизилась к критическому значению, то на рис. 1.3 при $q = 1,4$ напряженность отрицательна ($X < 0$ на сегменте $[0; 2,3]$) и физически уже не является напряженностью, а скорее характеризует степень стабильности. Такое значение X получается за счет отрицательного значения вынуждающей силы S на том же отрезке. Это видно из рис. 2.3. Отрицательную вынуждающую силу S скорее следует считать силой стабилизации. Из описанной ситуации можно сделать следующие выводы: области, для которых значение q лежит в отрезке $[0; 2,3]$, можно практически исключить из рассмотрения, сосредоточив основные средства управления на тех областях, в которых $СН$ больше нуля, и распределив средства управления по отдельным областям, пропорционально отвечающим этим областям размерам напряженности.

Рис. 1.4 практически совпадает с рис. 1.3 – форма графиков идентична, но на рис. 1.4 график больше смещен вправо. Такая же картина наблюдается и относительно графиков вынуждающей силы: рис. 2.3 и рис. 2.4 практически идентичны.

Ситуация, изображенная на рис. 1.5, практически идентична ситуации, отраженной на рис. 1.2 (правда, график на рис. 1.5 несколько смещен вниз). Выводы аналогичны.

Самая интересная, на наш взгляд, ситуация сложилась на рис. 1.6, когда практически весь график находится ниже среднего (допустимого) значения СН, только в точке $q_2 = 6,472$ график пересекает соответствующую горизонтальную прямую.

При этом динамика изменения вынуждающей силы, отраженная на рис. 2.6, показывает монотонный рост со слабым затуханием посередине, что практически полностью совпало бы с динамикой напряженности, если бы у последней не было резкого скачка на сегменте $[0; 1,6]$. Из ситуации можно сделать следующие выводы: основное количество средств управления целесообразно сосредоточить на областях региона, находящихся от центра на расстоянии, превышающем величину q_2 . При этом для остальных объектов региона практически не нужно применять средства управления.

Таким образом, анализ численных расчетов демонстрирует явное преимущество пространственно неоднородной модели. Ее использование позволяет оптимизировать распределение ресурсов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронина Н.Д.* Критический анализ известных способов измерения социальной напряженности // Актуальные проблемы современной социологии. М.: МАКС-Пресс, 2001.
2. *Толстова Ю.Н.* Концептуальное моделирование предметной области исследования при изучении социальной напряженности // Традиции и современность в социологии. М.: МАКС-Пресс, 2001.
3. *Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Черненков М.В.* Математическое моделирование информационных потоков в социуме // Математическое моделирование социальных процессов. М.: Изд-во МГУ, 2001. Вып. 3.
4. *Савенкова Н.П., Кузьмин Р.Н.* Математическое моделирование в рамках исторической социологии // Традиции и современность в социологии. М.: МАКС-Пресс, 2001.
5. *Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И.* Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 2000.