О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЯХ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ЧАСТОТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А.Н.Чураков

(Москва)

Настоящая статья продолжает тему, посвященную свойствам убывающих числовых последовательностей (начало см. в №11, [1]). В ней приводятся математические выкладки и результаты вычислительных экспериментов, связанные с изучением свойств одномерных частотных распределений, представленных в виде убывающих числовых последовательностей. Предметом исследования являются взаимосвязи между величиной модальной группы, количеством градаций признака, величиной антимодальной группы и пропорцией между частотами в одномерных распределениях.

Ключевые слова: величина модальной группы, одномерные частотные распределения, пропорция, убывающая последовательность, вычислительный эксперимент, математическое моделирование.

Чаще всего исследователь сталкивается с убывающими последовательностями при анализе одномерных частотных распределений с целью определения дифференцирующей силы признаков, установления характера распределения или нахождения эмпирических закономерностей поведения признаков, в том числе, поиска социальных констант. Убывающая последовательность в этих случаях представляет собой упорядоченные по убыванию (от наибольшего значения к наименьшему) абсолютные или относительные частоты. Выявление закономерностей между параметрами убывающих последовательностей позволяет с новых позиций подойти к анализу одномерных частотных распределений, и, следовательно, к построению математических моделей социальных явлений и процессов.

Одним из подходов к изучению убывающих числовых последовательностей в социологии является модульная теория социума, в которой данные последовательности рассматриваются как социальные модули, выполняющие определенные функции в некоторой социальной системе. В рамках этого подхода особое внимание уделяется двум числовым характеристикам социального модуля (убывающей последовательности): средней пропорции $pr = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{x_{i+1}}$ и отношению общего количества элементов в модуле к размеру наибольшей части $M = \frac{Se}{\max\limits_i x_i}$, где $x_i > 0$ - число элементов в i-ой части модуля (величина i-ого члена последовательности), $n \geq 2$ - количество частей модуля (число членов последовательности), $Se = \sum_{i=1}^{n} x_i$ - общее количество элементов модуля (сумма членов последовательности) [2, 3]. Ранее автором был доказан ряд теорем о связи величин *pr* и *M* для гармоничных и супергармоничных модулей. Напомним, что гармоничным модулем называется социальный модуль, в котором имеет место равенство $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n}$, а супергармоничным модулем называется социальный модуль, для которого выполняется более строгое условие $\frac{Se}{x_1} = M = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n}$.

Было установлено, что для гармоничного модуля при $pr > 1$

$M = \dfrac{pr(1 - pr^n)}{pr^n(1 - pr)}$ и что это отношение при $n \to \infty$ стремится к

$\dfrac{pr}{pr - 1}$. Также было доказано, что для каждого фиксированного числа частей модуля существует единственный супергармоничный модуль [2].

В то же время остался не изученным характер поведения величин M и pr для произвольного негармоничного модуля, в частности, вопрос о том, какова должна быть величина частей модуля, чтобы пропорция была наибольшей при фиксированном количестве частей и элементов модуля. В силу большой широты класса убывающих последовательностей решение данного вопроса без наложения дополнительных условий на величины частей модуля не представляется возможным. Однако такие дополнительные условия должны накладывать как можно меньше ограничений на характер убывающей последовательности.

Естественным “минимальным” ограничением на социальный модуль является ограничение снизу величины его наименьшей части. Можно указать ряд причин введения именно такого ограничения. Во-первых, потребность во введении ограничения на величину наименьшей части вытекает из эмпирических результатов. Так, исследования, проведенные А.А.Давыдовым, показали, что в реальных социальных системах величина пропорции наиболее часто находится в пределах 1,236 - 2,237 [3]. Автором данной статьи было установлено, что для различных социальных показателей в среднем 80% значений отношения M заключено в интервале 1,5 - 2,5 [1]. Отсюда можно сделать вывод о том, что для социальных модулей величина наименьшей части, как правило, не бывает много меньше остальных частей данного модуля (здесь под термином “много меньше" мы понимаем разницу в 3 и более порядка). Особо выделим, что на основании проведенных нами исследований можно выдвинуть гипотезу о наличии зависимости между *pr* и *M*. Во-вторых, подходя к изучению убывающих последовательностей с точки зрения формальной математики, отметим, что если не ограничивать снизу величину наименьшей части модуля, то тогда эту часть можно сколь угодно уменьшить, и, следовательно, сколь угодно увеличить пропорцию при произвольной величине остальных частей модуля и постоянном *M*. В силу этого, с одной стороны, нельзя говорить о какой-либо зависимости между *pr* и *M* и, с другой стороны, для пропорции возникает тривиальное ограничение $\max pr = \infty$. В-третьих, первичный анализ некоторого дискретного или непрерывного признака, измеренного по шкале выше порядковой, в социологии традиционно начинается с разбиения его на интервалы, для чего необходимо знать минимальное значение данного признака.

В дальнейших рассуждениях мы предполагаем фиксированными число частей модуля *n*, общее число его элементов *Se* и нижнюю границу величины наименьшей части модуля, которую будем обозначать ε. При этом также будем предполагать, что ε > 0, поскольку по определению социальный модуль не может иметь нулевых частей.

Определение. Максимальным модулем будем называть модуль, в котором размер первой части равен *Se-(n-1)*ε, а величина всех остальных частей равна ε (рис. 1).

В силу того, что число элементов модуля равно *Se* и первая часть считается наибольшей, на величину ε накладывается ограничение $\varepsilon \le \dfrac{Se}{n}$. По определению величина отношения *M* для максимального модуля будет равна $M_{\max} = \dfrac{Se}{Se-(n-1)\varepsilon}$, а величина пропорции будет равна

$$pr_{\max} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se-(n-1)\varepsilon}{\varepsilon} + n - 2 \right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se}{\varepsilon} - 1 \right).$$

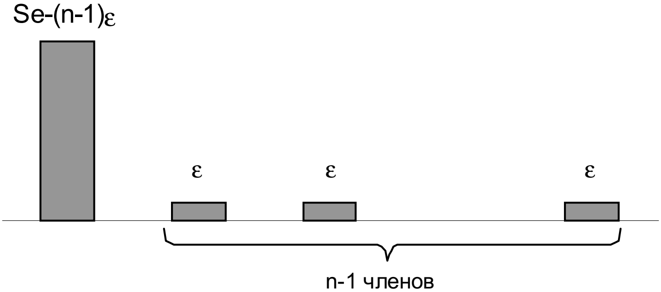

Рис. 1. Вид максимального модуля.

Замечание 1. Из определения максимального модуля следует, что величина ε связана с $pr_{\max}$ и $M_{\max}$ соотношениями

$$\varepsilon = \frac{Se - \dfrac{Se}{M_{\max}}}{n-1} \text{ и } \varepsilon = \frac{Se}{(n-1)\,pr_{\max} + 1}.$$

Замечание 2. Любой модуль, состоящий из двух частей, является максимальным. Легко показать, что в этом случае величины pr и M связаны соотношением $pr = \dfrac{1}{M-1}$.

Замечание 3. Также максимальным будет модуль с произвольным количеством частей, в котором величины всех частей равны между собой.

Теорема 1. Для всех модулей с одинаковыми числом частей, числом элементов и величиной наименьшей части максимальный модуль имеет наибольшую пропорцию и наименьшее значение отношения M.

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции. Рассмотрим максимальный модуль, в котором одна из частей, равных ε, увеличена на некоторую величину δ > 0 (рис. 2). Без ограничения общности мы можем считать, что увеличена вторая часть модуля, поскольку мы всегда можем упорядочить части модуля по убыванию. В то же время для того, чтобы увеличенная часть не стала наибольшей частью модуля, необходимо, чтобы выполнялось условие $\varepsilon + \delta \le Se - (n-1)\varepsilon - \delta$. Отсюда получаем, что $\frac{Se - n\varepsilon}{2} \ge \delta > 0$. Величина отношения *M* для данного модуля равна

$$M^* = \frac{Se}{Se - (n-1)\varepsilon - \delta} > M_{\max} .$$

Пропорция такого модуля по определению будет равна

$$pr^* = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se - (n-1)\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} + \frac{\varepsilon + \delta}{\varepsilon} + n - 3\right).$$

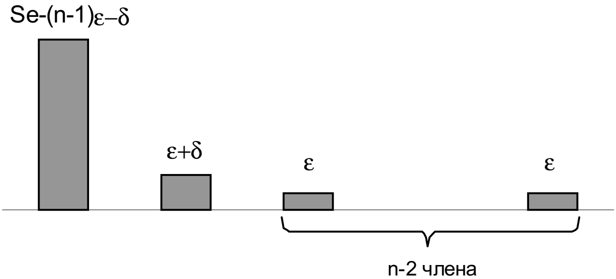

Рис. 2. Максимальный модуль с одной увеличенной частью.

Необходимо доказать, что $pr^* < pr_{\max}$. Предположим противное, а именно что $pr^* \ge pr_{\max}$. Отсюда имеем:

$$pr^* = \frac{\varepsilon\ Se-(n-1)\varepsilon^2-\varepsilon\delta+(\varepsilon+\delta)^2+\varepsilon\ (n-3)(\varepsilon+\delta)}{\varepsilon\ (n-1)(\varepsilon+\delta)} \geq pr_{\max} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se}{\varepsilon}-1\right) = \frac{Se-\varepsilon}{\varepsilon\ (n-1)}$$

$$\frac{\varepsilon\ Se-(n-1)\varepsilon^2-\varepsilon\delta+\varepsilon^2+2\varepsilon\delta+\delta^2+\varepsilon^2\ (n-3)+\varepsilon\delta\ (n-3)}{\varepsilon\ (n-1)(\varepsilon+\delta)} \geq \frac{\varepsilon\ Se-\varepsilon^2+\delta\ Se-\varepsilon\delta}{\varepsilon\ (n-1)(\varepsilon+\delta)}$$

$$\frac{2\varepsilon\delta-\delta\ Se+\delta^2+\varepsilon\delta\ (n-3)}{\varepsilon\ (n-1)(\varepsilon+\delta)} \geq 0$$

Это условие выполняется, когда числитель данной дроби неотрицателен:

$$\delta^2-\delta\ Se+\varepsilon\delta\ (n-1) \geq 0$$

Сократив на δ (по условию δ > 0), получим:

$$\delta - Se+\varepsilon\ (n-1) \geq 0$$

$$Se-\delta-\varepsilon\ (n-1) \leq 0$$

Левая часть этого неравенства есть размер первой части модуля, но по определению размер части модуля положителен. Следовательно, пришли к противоречию, и предположение о том, что $pr^* \geq pr_{\max}$, является неверным. Отсюда следует, что $pr^* < pr_{\max}$.

Нами доказано, что $pr^* < pr_{\max}$ для увеличения одной части модуля. Далее будем считать, что это условие доказано для увеличения k частей модуля и докажем его для увеличения k+1 части. При этом для k должно выполняться очевидное условие $k \leq n$-2.

Рассмотрим максимальный модуль, в котором k+1 частей, равных ε, увеличены на некоторые величины $\frac{Se-n\varepsilon}{2} \geq \delta_1 \geq \delta_2 \geq \ldots \geq \delta_{k+1} > 0$ (рис. 3). Без ограничения общности можно считать, что увеличены части со 2-ой по k+2-ую, так как для вычисления пропорции части модуля упорядочиваются по убыванию. Величина отношения M для данного модуля равна

$$M^{**} = \frac{Se}{Se-(n-1)\varepsilon-\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i} > M_{\max}.$$

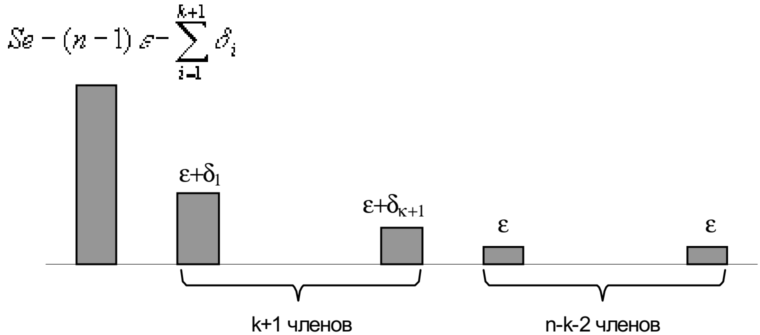

Рис. 3. Максимальный модуль с $k+1$ увеличенной частью.

Пропорция такого модуля по определению будет равна

$$pr^{**} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se-(n-1)\varepsilon-\sum_{i=1}^{k+1}\delta_i}{\varepsilon+\delta_1}+\sum_{i=2}^{k}\frac{\varepsilon+\delta_i}{\varepsilon+\delta_{i+1}}+\frac{\varepsilon+\delta_{k+1}}{\varepsilon}+n-k-3\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{Se-(n-1)\varepsilon-\sum_{i=1}^{k}\delta_i}{\varepsilon+\delta_1}+\sum_{i=2}^{k-1}\frac{\varepsilon+\delta_i}{\varepsilon+\delta_{i+1}}+\frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon}+n-k-2\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{n-1}\left(\frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon+\delta_{k+1}}-\frac{\delta_{k+1}}{\varepsilon+\delta_1}+\frac{\varepsilon+\delta_{k+1}}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon}-1\right)$$

Выражение в квадратных скобках есть пропорция модуля, в котором увеличены k частей. По предположению индукции значение этого выражения меньше $pr_{\max}$:

$$pr^{**} < pr_{\max} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon+\delta_{k+1}} - \frac{\delta_{k+1}}{\varepsilon+\delta_1} + \frac{\varepsilon+\delta_{k+1}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon} - 1\right) \le$$

в силу условия $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \ldots \ge \delta_{k+1} > 0$

$$\le pr_{\max} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon} - \frac{\delta_{k+1}}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon+\delta_{k+1}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon+\delta_k}{\varepsilon} - 1\right) \le$$

$$\le pr_{\max} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varepsilon+\delta_{k+1}}{\varepsilon} - \frac{\delta_{k+1}}{\varepsilon} - 1\right) = pr_{\max} .$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Рассмотрим максимальный модуль с $\varepsilon = \frac{Se}{n}$, то есть модуль, в котором все части равны. Легко показать, что для такого модуля пропорция будет равна 1, а M будет равно n. Очевидно, что для всех произвольных модулей с одинаковым числом частей значение $pr = 1$ является нижней границей величины пропорции, а значение $M = n$ является верхней границей величины отношения M. Отсюда следует, что максимальный модуль, в котором все части равны, имеет наименьшую пропорцию и наибольшее значение отношения M. Таким образом, максимальный модуль в зависимости от величины ε отвечает как нижней, так и верхней границам для значений pr и M.

Следствие 2. Из условия $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n$ и доказательства теоремы 1 вытекает, что для любой невозрастающей последовательности (модуля) при $1 \le i \le n$ выполняется неравенство

$$x_i \le \frac{Se-(n-i)x_n}{i}.$$

Отметим, что при $i = n$ данное условие имеет вид $x_n \le \frac{Se}{n}$.

Так как в случае максимального модуля $x_n = \varepsilon$, то мы получаем то же самое ограничение для величины ε, которое было введено нами в определении максимального модуля.

Теорема 2. Для максимального модуля имеет место равенство

$$pr_{\max} = \frac{M_{\max}}{M_{\max}-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Доказательство. По определению максимального модуля

$$M_{\max} = \frac{Se}{Se-(n-1)\varepsilon}.$$

Преобразовывая, получаем:

$$\varepsilon = \frac{Se}{n-1}\left(1-\frac{1}{M_{\max}}\right) \tag{1}$$

$$pr_{\max} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Se}{\varepsilon}-1\right) = \frac{Se}{\varepsilon\,(n-1)} - \frac{1}{n-1} \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), имеем

$$pr_{\max} = \frac{Se}{\frac{Se}{n-1}\left(1-\frac{1}{M_{\max}}\right)(n-1)} - \frac{1}{n-1} = \frac{M_{\max}}{M_{\max}-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для максимального модуля имеет место формула

$$M_{\max} = \frac{pr_{\max}(n-1)+1}{pr_{\max}(n-1)-n+2}.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что

$pr_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{M_{\max}-1} - \dfrac{1}{n-1}$. Тогда

$$M_{\max} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{pr_{\max}+\cfrac{1}{n-1}}} = \frac{pr_{\max}(n-1)+1}{pr_{\max}(n-1)-n+2}.$$

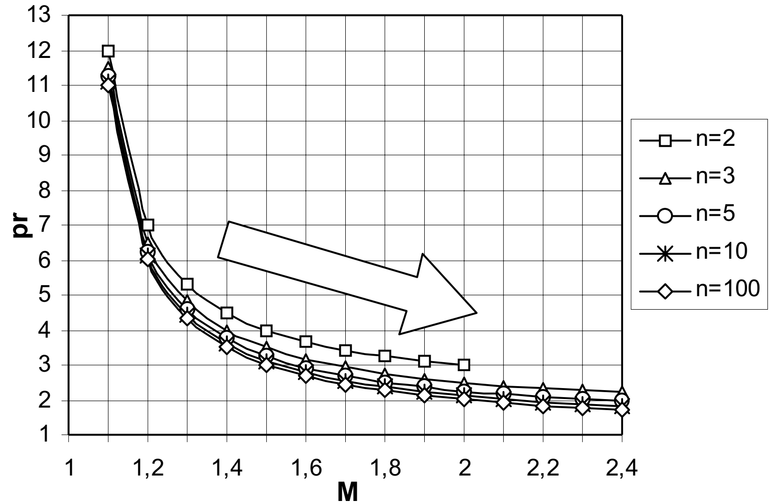

***Рис. 4. Зависимость между** М **и** pr **для максимальных модулей с различным числом частей** n. **Стрелка показывает направление увеличения** ε.*

В силу замечания 1 к определению максимального модуля величины M и n для максимального модуля однозначно определяют значения *pr* и ε. Аналогично *pr* и *n* однозначно определяют *M* и ε. Из теоремы 2 следует, что функциональная зависимость между *M* и *pr* имеет гиперболический вид. На рис. 4 показан характер этой зависимости для различного числа частей модуля.

До сих пор рассматривалась задача построения произвольного модуля с максимальным значением *pr*. При этом не принимались во внимание те эмпирические факты о диапазонах изменения *pr* и *M*, которые были отмечены в начале данной статьи. В связи с этим возникает вопрос о том, какой вид должен иметь модуль для того, чтобы он имел максимальную пропорцию при некотором фиксированном значении *M*. В дальнейшем будем предполагать, что число частей модуля больше или равно 3, поскольку в случае 2 частей существует единственный модуль для каждого значения *M*.

Задание величины *M* эквивалентно заданию величины первой части модуля, поскольку из определения *M* следует, что $x_1 = \frac{Se}{M}$. По теореме 1 модуль будет иметь наибольшую пропорцию в том случае, когда он будет максимальным. Однако модуль с фиксированным *M* будет максимальным только тогда, когда $M = M_{\max} = \frac{Se}{Se-(n-1)\varepsilon}$. Отсюда можно сделать вывод о том, что максимальная пропорция модуля с фиксированным *M* при $M \neq M_{\max}$ будет строго меньше пропорции максимального модуля с теми же значениями *Se, n,* ε (из этого следует, что для величины М будет выполняться условие $M \geq M_{\max}$), и, следовательно, вид такого модуля с максимальной пропорцией будет отличаться от вида максимального модуля.

Согласно теореме 1 максимум пропорции достигается в случае, когда отношение $\frac{x_1}{x_2}$ максимально, а $\frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1$. Но в силу того, что пропорция линейно зависит от попарных отношений членов модуля, то ту же величину пропорции можно получить, поменяв местами слагаемые. Это указывает на то, что для достижения максимальной пропорции необходимо, чтобы отношение каких-либо двух соседних частей данного модуля было бы как можно больше, что, в свою очередь, означает, что попарные отношения всех остальных частей этого модуля будут близки к единице. Таким образом, модуль с максимальной пропорцией будет иметь следующий вид: для некоторого *i*, такого, что $1 \le i < n$, значение $\frac{x_i}{x_{i+1}}$ максимально, а для всех остальных членов $\frac{x_1}{x_2} \approx \ldots \approx \frac{x_{i-1}}{x_i} \approx \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} \approx \ldots \approx \frac{x_{n-1}}{x_n} \approx 1$. Другими словами, в силу задания *M* имеем $\frac{Se}{M} = x_1 \approx \ldots \approx x_i$, а $x_{i+1} \approx \ldots \approx x_n \approx \varepsilon$. Символ приближенного равенства используется, поскольку при фиксированном *M* имеем $\max \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{Se}{M\varepsilon}$, причем максимум достигается при единственном значении ε для каждого *M*, в то время как нашей целью является определение конструкции модуля с максимальной пропорцией для произвольных значений ε. Отметим, что создать такой модуль можно различными способами в зависимости от величины *M*. Конструирование и тестирование различных вариантов модуля с максимальной пропорцией осуществлялось путем проведения вычислительных экспериментов в программе Microsoft Excel, в которых, в частности, с помощью различных методов оптимизации было выявлено отсутствие других вариантов модуля с максимальной пропорцией, кроме тех, которые будут указаны ниже.

Введем следующие обозначения:

$\lceil x \rceil = \min\{n \mid n \geq x,\ n - целое\}$ - величина "потолка" x, то есть наименьшего целого числа, большего или равного x;

$\lfloor x \rfloor = \max\{n \mid n \leq x,\ n - целое\}$- величина "пола" x, то есть наибольшего целого числа, меньшего или равного x;

$[x]$ - целая часть x;

$$\hat{M} = \frac{Se\,[M]}{Se - \varepsilon\,(n - [M])};$$

$$q = \begin{cases} \lceil M - 1 \rceil,\ при\ \hat{M} \geq M \leq \lceil M \rceil \\ \lfloor M - 1 \rfloor,\ при\ \lfloor M \rfloor < M < \hat{M} \end{cases};$$

$$\Delta = \frac{Se - \frac{Se}{M} - (n - q - 1)\varepsilon}{q}.$$

Поскольку мы предполагаем фиксированными значения величин n, Se и M, то из этого следует, что $0 < \varepsilon < \dfrac{Se - \frac{Se}{M}}{n - 1}$. При этих условиях было найдено два варианта построения модуля с максимальной пропорцией (см. рис. 5 и рис. 6).

Пропорция модуля на рис. 5 будет по определению равна

$$pr_{\max 1}(M) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\frac{Se}{M}}{\Delta} + q - 1 + \frac{\Delta}{\varepsilon} + n - q - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{q\frac{Se}{M}}{Se - \frac{Se}{M} - (n-q-1)\varepsilon} + \frac{Se - \frac{Se}{M} - (n-q-1)\varepsilon}{q\varepsilon} + n - 3\right)$$

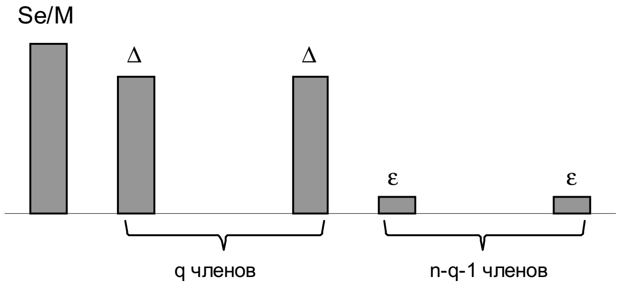

***Рис. 5. Первый вариант модуля с максимальной пропорцией при заданном** M.*

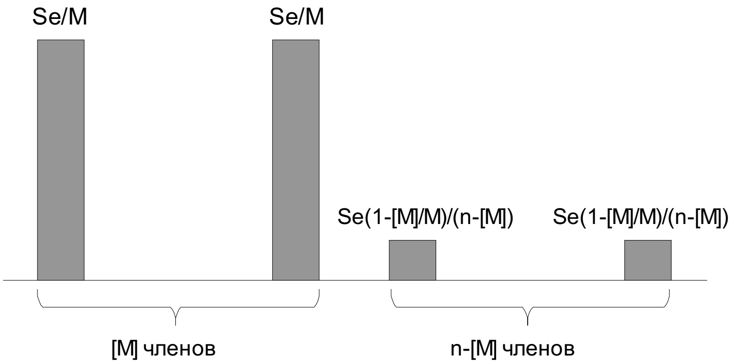

***Рис. 6. Второй вариант модуля с максимальной пропорцией при заданном** M.*

Модуль на рис. 6 существует, когда $M < n$, M не является целым числом и $\dfrac{Se\left(1-\dfrac{[M]}{M}\right)}{n-[M]} \geq \varepsilon$. В силу этого допустимые значения M при $[M] < n$ заключены в интервале

$$\hat{M} \leq M < [M+1]. \tag{3}$$

Следует отметить, что при росте n этот интервал будет сужаться и при достаточно больших n вообще перестает существовать на некоторых интервалах M, что указывает на невозможность существования в этом случае данного варианта модуля. Определить, какое максимальное количество частей при заданных M и ε может иметь модуль, построенный по схеме на рис.6, можно из условия $n \leq \dfrac{Se}{\varepsilon}\left(1-\dfrac{[M]}{M}\right)+[M]$.

Пропорция рассматриваемого модуля по определению равна

$$pr_{\max 2}(M) = \frac{1}{n-1}\left(n-2+\frac{\dfrac{Se}{M}(n-[M])}{Se\left(1-\dfrac{[M]}{M}\right)}\right).$$

Отметим, что при $n-1 < M \leq n$ такой модуль будет иметь вид $x_1 = \ldots = x_{n-1} = \dfrac{Se}{M}$, $x_n = Se-(n-1)\dfrac{Se}{M}$ и его пропорция будет равна

$$pr_{\max 2}(M) = \frac{1}{n-1}\left(n-2+\frac{\frac{Se}{M}}{Se-\frac{Se(n-1)}{M}} \right) = \frac{1}{n-1}\left(n-2+\frac{1}{M-n+1} \right).$$

Из условия $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ и следствия 2 из теоремы 1 имеем, что $\forall\, i, 1 \leq i \leq n$ $\frac{Se}{M} = x_1 \leq \frac{Se-(n-i)\varepsilon}{i}$. Отсюда получаем набор условий

$$M \geq \frac{iSe}{Se-(n-i)\varepsilon}. \tag{4}$$

Это условия существования i-ой части второго варианта модуля с максимальной пропорцией при заданном $i < M < i+1$. Но в случае $i < M < i+1$ можно считать, что $i = [M]$, в результате чего неравенство (4) преобразуется в условие (3) для интервалов допустимых значений *M*. Таким образом, второй вариант модуля с максимальной пропорцией может быть найден, исходя из определения и свойств максимального модуля.

Анализ того, какой из этих двух вариантов модулей и в каких диапазонах *M* обеспечивает максимальное значение пропорции, был также осуществлен с помощью ряда вычислительных экспериментов с использованием программ Microsoft Excel и Visual Basic. В этих экспериментах определялся максимум пропорции для двух описанных выше вариантов модулей с наибольшей пропорцией, состоящих из 3, 4, 5, 6, 10 и 20 членов при изменении *M* от 1 до числа членов модуля. Также были проведены вычислительные эксперименты, направленные на нахождение величины минимальной пропорции для модуля с фиксированным *M*. В результате было выявлено, что вид зависимостей максимума и минимума пропорции от значения *M* является в большой степени идентичным для различного числа частей модуля (рис. 7). При сравнении рис. 7 и рис. 8 хорошо видно, что изменение числа частей модуля приводит лишь к изменению количества средних участков кривых максимума пропорции, а форма концевых участков остается неизменной. Следует отметить, что практически полное совпадение трех кривых на начальном участке объясняется тем, что при данных значениях M вид любого модуля весьма близок к максимальному. Вообще говоря, все эти кривые будут начинаться в одной точке с координатами $(M_{\max}; pr_{\max})$, что приводит к эквивалентности начальных участков графиков на рис. 4 и рис. 7 и 8.

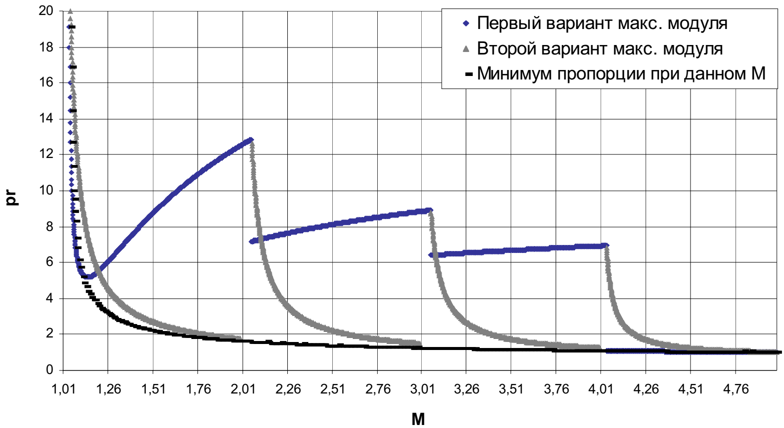

Рис. 7. Максимальные и минимальное значения пропорции при $n = 5$ ***и*** $\varepsilon = 0{,}01$.

Побочным, но важным следствием вычислительных экспериментов явилось создание графика диапазона допустимых значений пропорции при заданном M (рис. 9), который позволяет по значению M оценивать величину pr и наоборот. Это дает возможность соотнести результаты, накопленные при изучении величины модальной группы в одномерных частотных распределениях [1, 2], с результатами, полученными в рамках модульной теории социума [2, 3], в частности, с одной стороны, использовать ее объяснительные возможности для содержательной интерпретации значения отношения *M*, и, с другой стороны, существенно расширить математический аппарат модульной теории, по-новому подойдя к вычислению и математической интерпретации величины пропорции.

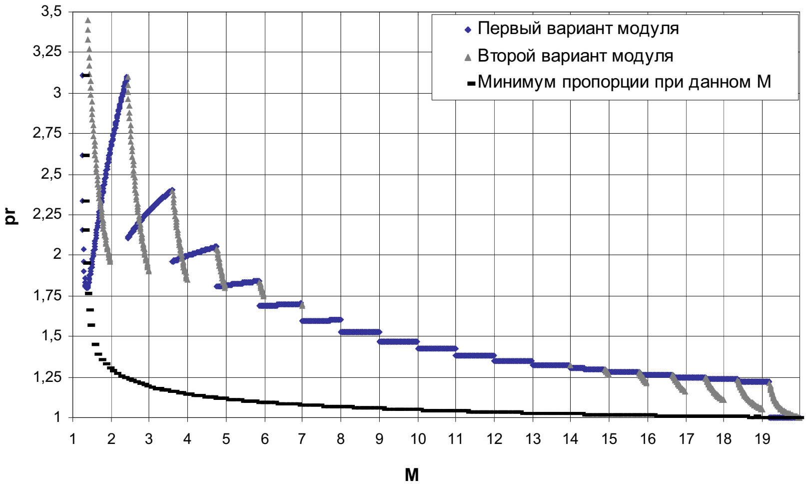

Рис. 8. Максимальные и минимальное значения пропорции при $n = 20$ ***и*** $\varepsilon = 0{,}01$.

Рис. 9 указывает математическую трактовку установленного нами в [3] эмпирического факта существования нижней границы значения *M*, равной 1,237. Это число приближенно соответствует среднему значению абсциссы локального минимума зависимостей пропорции от величины *M* для $3 \leq n \leq 20$. Также, основываясь на рис. 9, можно с новых позиций подойти к объяснению отмеченного нами в [3] явления наиболее частой встречаемости в эмпирических данных значения $M = 2$, а именно, что эта величина отношения *M* соответствует наиболее широкому диапазону возможных значений пропорции, то есть данное значение *M* может быть получено наибольшим числом способов и, следовательно, имеет наибольшую вероятность. В этой связи следует отметить возрастание величины *M*, соответствующей максимальному диапазону *pr*, при увеличении числа частей модуля, что следует из сравнения рис. 7 и рис. 8.

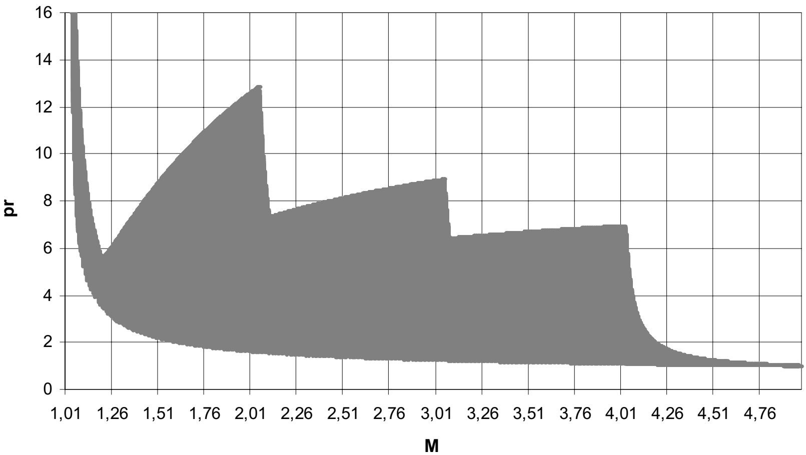

***Рис. 9. Диапазон изменения пропорции при** n = **5 и** $\varepsilon = 0{,}01$.*

В дальнейшем планируется проверить гипотезу о существовании аналогичной закономерности при анализе реальных социологических данных. Также весьма важным направлением исследований представляется поиск модулей, близких к максимальным, и модулей с предельными значениями *M* и *pr*, в частности, одномерных частотных распределений, соответствующих двум вышеуказанным вариантам модулей с максимальной пропорцией при заданном *M*, с целью выявления того, для каких социальных систем они характерны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чураков А.Н.* О специфике модальных групп в частотных распределениях // Социология: методология, методы, математические модели. 1999. №11. С. 179-198.
2. *Давыдов А.А., Чураков А.Н.* Модульный анализ и моделирование социума. М.: ИСАН, 2000.
3. *Давыдов А.А.* Модульный анализ и конструирование социума. М.: ИСАН, 1994.