

---

---

## ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

А.А.Давыдов

*(Москва)*

В статье предложена математическая модель, описывающая некоторые виды социальной динамики; с помощью численного моделирования рассматриваются свойства этой модели; приведены примеры использования модели для оценки латентной преступности в Российской Федерации и выявления закономерностей в динамике ответов респондентов.

*Ключевые слова:* социальная динамика, математическая модель, численное моделирование, латентная преступность в Российской Федерации, динамика ответов респондентов.

Под социальной динамикой понимается множество социальных процессов, которые традиционно подразделяются на следующие виды: социальная диффузия (распространение информации, моды, слухов, инноваций, эпидемий, паники, товаров, услуг и т.д.), процессы “жизненного цикла” (подъем и спад популярности политических лидеров, объемов продаж и т.д.), процессы “распада” (спад интереса населения к какому-либо явлению), циклические (колебательные) процессы [1].

Существует значительное количество математических моделей, описывающих различные виды социальных процессов, с которыми можно ознакомиться в [1-6]. Данные модели основаны на различных содержательных представлениях о механизмах и факторах социальных процессов; в них используются различные функции, например, логарифмическая, экспоненциальная, логистическая, синусоидальная; различное количество параметров в моделях.

С целью обобщения существующих моделей автором разработана дискретная динамическая модель (1), с помощью которой можно описывать различные социальные процессы, проводить численное моделирование, объяснять количественные закономерности функционирования различных социальных процессов, исходя из эмпирически измеряемых параметров модели.

$$y_n = k_n (N_n - y_{n-1}) + y_{n-1}, \quad (1)$$

где  $y_n$  - количество элементов (людей, товаров, услуг, событий и т.д.), на “шаге”  $n$ ;

$n$  - порядковый номер “шага” (периода времени),  $n$ ;

$k_n$  - коэффициент на шаге  $n$ ;

$N_n$  - размер генеральной совокупности элементов на “шаге”  $n$ .

Постулируется, что значения  $k$  и  $N$  могут изменяться на каждом временном “шаге”. Данный постулат вытекает из эмпирических наблюдений различных популяций во времени, известных теоретических и эмпирических моделей социальных процессов [1], из общей теории систем [7].

Содержательная интерпретация коэффициента  $k$  в модели (1) зависит от принятой теоретической модели и содержательной специфики социального процесса. Приведем несколько примеров возможной интерпретации. Если исходить из общей теории систем [7], то тогда коэффициент  $k$  следует интерпретировать как системообразующий параметр социального процесса, величина и характер изменения которого зависят от взаимодействия всех элементов в системе, а также от влияния других социальных систем. Если исходить из теории самоорганизации [8-10], то тогда коэффициент  $k$  в модели (1) следует интерпретировать как параметр самоорганизации, величина которого может зависеть от времени. Если исходить из теории оптимального управления динамическими системами [11], то тогда коэффициент  $k$  в модели (1) можно интерпретировать как управляющий параметр. Если исходить из терминологии, принятой при изучении процессов социаль-

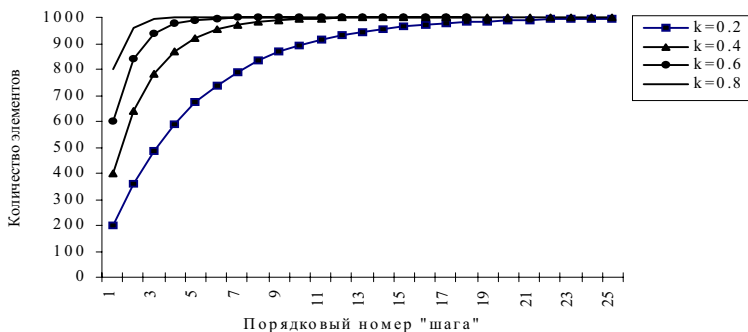
ной диффузии [4], то тогда коэффициент  $k$  в модели (1) следует интерпретировать как коэффициент диффузии, величина и характер изменения которого зависят от специфики социального процесса и количества элементов на каждом временном “шаге”.

С целью изучения возможностей модели (1) при изменении начального числа элементов, параметров  $k$ ,  $N$  на каждом “шаге”, применялось численное моделирование. Основной исследовательский вопрос при этом был следующим. Может ли модель (1) генерировать основные виды социальных процессов: социальную диффузию, описываемую логарифмической, экспоненциальной, логистической функциями; процессы распада, “жизненного цикла”, циклические процессы? Численное моделирование проводилось с помощью пакета Microsoft Excel. Ниже рассмотрены полученные результаты моделирования видов социальной динамики.

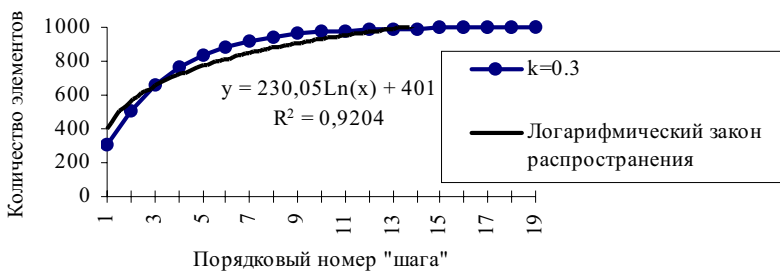
### *Результаты численного моделирования*

**Социальная диффузия.** Рассмотрим полученные результаты, когда  $N=const$ ,  $k=const$ . Для выявления закона распространения при данных условиях мы провели вычислительный эксперимент, в котором  $N=1000$ ,  $k=0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ . Результаты численного моделирования приведены на рисунке 1. Он иллюстрирует, что при  $N=const$ ,  $k=const$  модель (1) генерирует логарифмический закон распространения, который соответствует процессам социальной диффузии [4; 1, с. 108].

Сравним теперь результаты, полученные с помощью модели (1) при  $N=1000$ ,  $k=0,3$  с логарифмическим законом распространения. Результаты сравнения представлены на рисунке 2. При  $N=1000$ ,  $k=0,3$  модельная зависимость хорошо согласуется со стандартной логарифмической зависимостью (см. рис. 2).



**Рис. 1. Логарифмический закон распространения**



**Рис. 2. Соответствие между модельной динамикой и логарифмическим законом распространения**

Исследуем теперь случай, когда  $k = \frac{x_{n-1}}{N}$ , где  $N = \text{const}$ . Для вычислительного эксперимента примем следующие значения:  $N=1000$ , начальные значения  $x_i=5, 10, 50, 100$ . Результаты численного моделирования представлены на рисунке 3.

Рисунок 3 иллюстрирует, что при  $N = \text{const}$ ,  $k = \frac{x_{n-1}}{N}$  и начальных значениях  $x_{n-1}$ , равных 5, 10, 50 и 100 элементам, модель

(1) генерирует логистический закон распространения, который соответствует процессам социальной диффузии [4; 1, с.108].

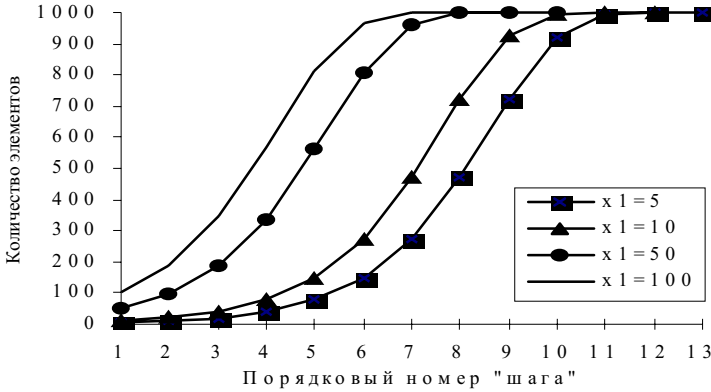


Рис. 3. Логистический закон распространения

Из модели (1) вытекает, что при линейном увеличении значения  $k$  от «шага» к «шагу» динамика распространения будет линейной, при экспоненциальной зависимости - экспоненциальной и т.д. В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда значение коэффициента  $k$  изменяется по экспоненциальному закону от «шага» к «шагу». Для вычислительного эксперимента примем следующие значения:  $N=1000$ , начальное значение коэффициента  $k=0,001$ , знаменатель геометрической прогрессии  $q$  равен 1,6. Выбор данного значения знаменателя геометрической прогрессии обусловлен его частой встречаемостью в эмпирических исследованиях [12]. Результаты численного моделирования представлены на рисунке 4.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что на 15 «шаге» количество элементов равно 933. Это максимально возможное число элементов, не превышающее размер генеральной совокупности (1000 элементов), при данном первом члене и знаменателе геометрической прогрессии.

Рассмотрим теперь случай, когда  $N=const$ , а значение  $k$  изменяется случайным образом. Для этой цели мы использовали генератор случайных чисел из пакета Microsoft Excel для равномерно распределенных случайных чисел между 0 и 1 и провели вычислительный эксперимент, в котором  $N=1000$ . Результаты трех проведенных серий представлены на рисунке 5.

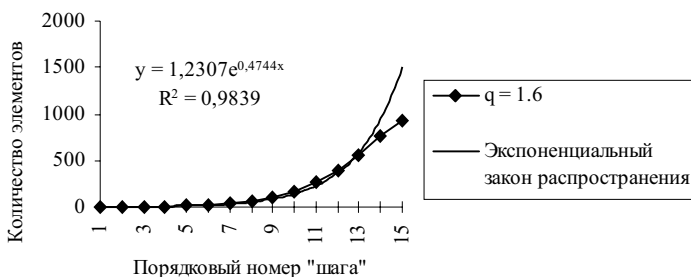


Рис. 4. Экспоненциальный закон распространения при изменении величины  $k$

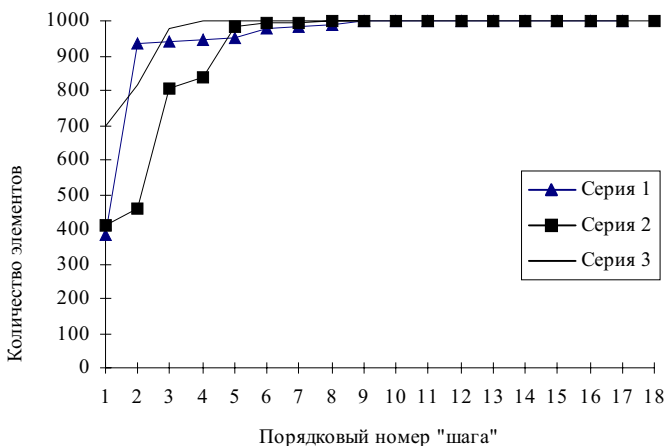
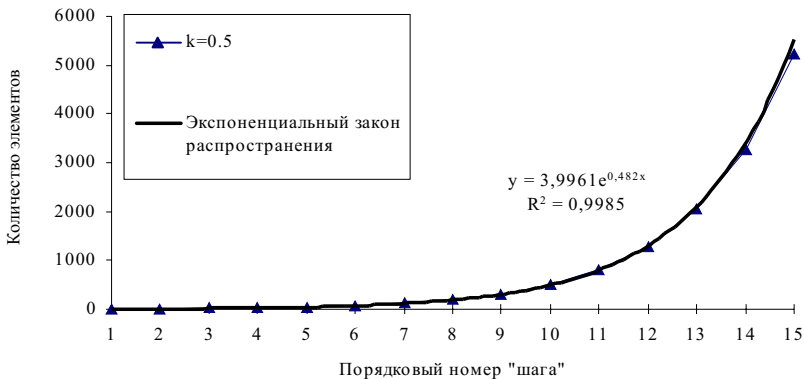


Рис. 5. Логарифмический закон распространения со случайными изменениями величины  $k$

Рисунок 5 показывает, что если значения коэффициента  $k$  изменяются случайным образом от “шага” к “шагу” в пределах некоторых границ, то полученная динамика очень похожа на динамику неравномерного распространения, которую можно часто наблюдать в эмпирических исследованиях. Отсюда можно выдвинуть предположение, что в распространении многих социальных явлений значения коэффициента  $k$  изменяются случайным образом от “шага” к “шагу” в пределах некоторых границ.

Рассмотрим теперь случай, когда  $k=const$ , а  $N \neq const$ . Из модели (1) вытекает, что при линейном увеличении значения  $N$  от “шага” к “шагу” динамика распространения будет линейной, при экспоненциальной зависимости - экспоненциальной и т.д. В качестве иллюстрации рассмотрим результат вычислительного эксперимента, в котором  $k=0,5$ , а величина  $N$  увеличивается от “шага” к “шагу” по экспоненциальной зависимости (геометрическая прогрессия из 15 членов с начальным членом, равным 10, и знаменателем прогрессии равным 1,6). На рисунке 6 представлены полученные результаты.



**Рис. 6. Экспоненциальный закон распространения при изменении значения  $N$**

Рассмотрим теперь случай, когда одновременно изменяются  $k$  и  $N$ . Для проведения вычислительного эксперимента были построены две модели изменения. Первая модель -  $N$  увеличивается от 1000 до 2800 с шагом 100, а  $k$  уменьшается от 0,95 до 0,05 с шагом 0,5. Вторая модель -  $N$  увеличивается от 1000 до 2800 с шагом 100, а  $k$  увеличивается от 0,05 до 0,95 с шагом 0,5. Результаты численного моделирования представлены на рисунке 7.

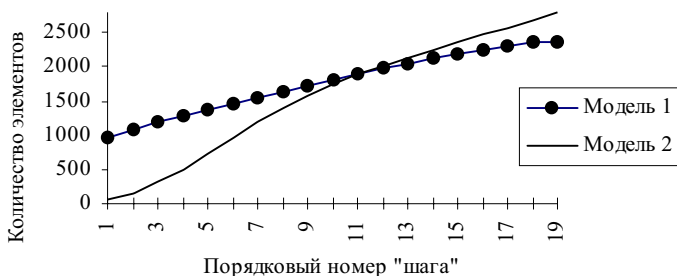


Рис. 7. Модели распространения при изменении  $k$  и  $N$

**Процессы “жизненного цикла”.** На рисунке 8 приводятся три модели “жизненного цикла”, различающиеся закономерностями изменения значений коэффициента  $k$ .

Модель 1.  $N=const, k_1=0,1$ , увеличение  $k$  с 1 по 9 “шаг” равно 0,1, с десятого “шага”  $k=const=-1$ .

Модель 2.  $N=const=1000, k_1=0,1$ , увеличение значений  $k$  с 1 по 5 “шаг” равно 0,1, с шестого “шага” уменьшение значений  $k$  с -0,1 до -0,6.

Модель 3.  $N=const=1000, k_1=const=0,1$  с первого по шестой “шаг”, с седьмого “шага” уменьшение значений  $k$  с -0,3 до -0,1.

Проведенные автором вычислительные эксперименты показали, что динамику “жизненного цикла” можно также наблюдать, если  $k=const, k>0$ , а значения  $N$  линейно уменьшаются от “шага” к “шагу”.



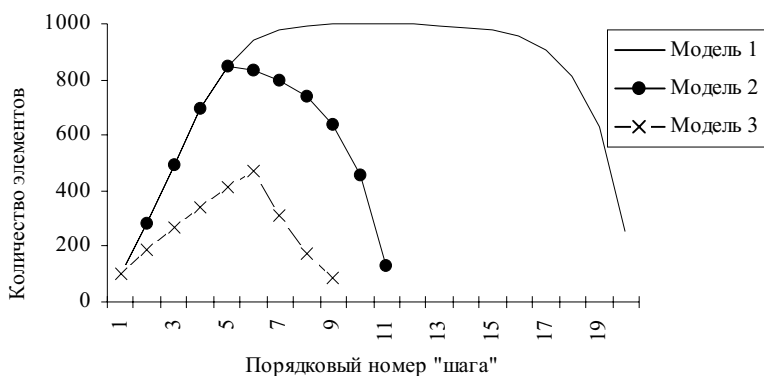


Рис. 8. Модели “жизненного цикла”

**Процессы “распада”.** Проведенные автором вычислительные эксперименты показали, что модель (1) позволяет описывать социальные процессы “распада” при различных изменениях значений  $N$  и (или)  $k$ . Например, значения  $N$  и  $k$  уменьшаются от “шага” к “шагу”, при этом  $0 \leq k \leq 1$ ; если  $N = const$ , а значения  $k$  уменьшаются нелинейным образом; если значения  $N$  уменьшаются от “шага” к “шагу”, а значения  $k$  увеличиваются, причем  $k_1 = 1$ ; если значения  $N$  увеличиваются от “шага” к “шагу”, а значения  $k$  уменьшаются, причем  $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, 2$ . Задавая закон уменьшения значений  $N$  и (или)  $k$ , можно получить основные типы процессов распада: линейный, логарифмический, экспоненциальный, логистический.

В качестве примера на рисунке 9 помещены линейный и экспоненциальный процессы “распада” при следующих значениях параметров модели. Параметры линейного “распада” -  $N_1 = 1000$ , шаг уменьшения  $N$  равен 100,  $k_1 = 1$ , шаг увеличения  $k$  равен 0,1. Параметры экспоненциального “распада” -  $N_1 = 1000$ , уменьшение значений  $N$  по геометрической прогрессии, знаменатель прогрессии равен 0,6,  $k_1 = 1$ , увеличение значений  $k$  по геометрической прогрессии, знаменатель геометрической прогрессии равен 1,6.

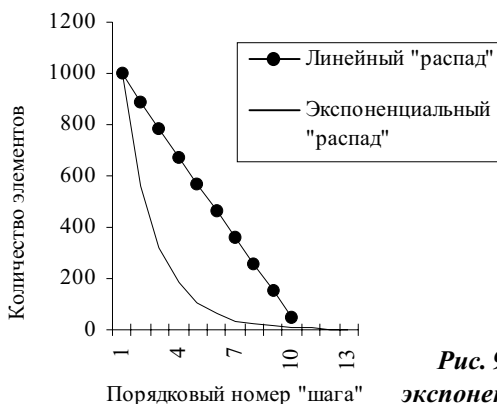


Рис. 9. Модели линейного и экспоненциального "распада"

**Циклические социальные процессы.** В моделях социальной диффузии и "жизненного цикла", которые мы рассмотрели выше, циклическую динамику можно задать, циклически изменяя значения параметров  $N$  и  $k$  от "шага" к "шагу". В качестве примера на рисунке 10 представлены модели социальной диффузии и "жизненного цикла" с колебаниями значений коэффициента  $k$ .

Параметры модели социальной диффузии с колебаниями -  $N=const=1000$ ,  $k$  попеременно принимает значения 0,1 и 0,5.

Параметры модели "жизненного цикла" с колебаниями -  $N=const=1000$ , до седьмого "шага"  $k$  попеременно принимает значения 0,01 и 0,5, с восьмого "шага"  $k$  попеременно принимает значения -0,01 и -0,5.

При рассмотрении социальных процессов иногда наблюдается случай, когда распространение численности элементов доходит до предельной точки насыщения и дальше совершает циклические колебания вокруг нее. Модель (1) позволяет описать данный случай. На рисунке 11 представлен пример колебания около предельной точки насыщения при следующих значениях параметров:  $N=const=1000$ , с первого по седьмой "шаг"  $k=const=0,1$ , с восьмого по шестнадцатый "шаг"  $k$  попеременно принимает значения -0,1 и 0,1.

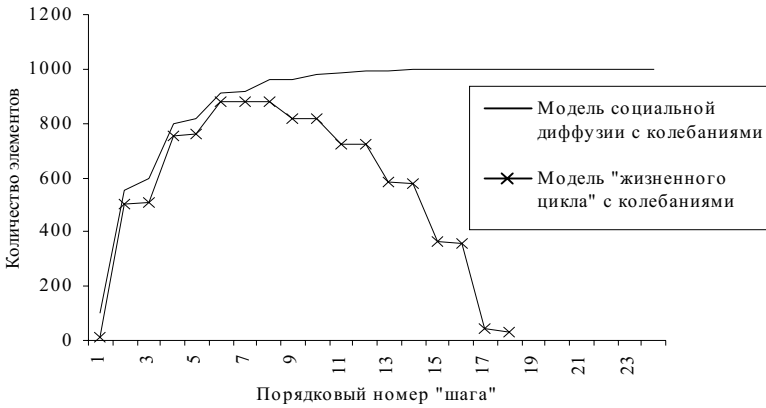


Рис. 10. Циклические модели



Рис. 11. Модель колебания у точки насыщения

Подводя итог рассмотрению результатов численного моделирования, отметим, что модель (1) может генерировать основные виды социальных процессов, описываемых логарифмической, экспоненциальной, логистической, синусоидальной функциями.

### Приложения модели

Рассмотрим теперь использование модели (1) для решения следующей задачи. Дана динамика какого-либо социального показателя, по которой нужно вычислить параметры модели (1). Рассмотрим ее решение на примере динамики числа зарегистри-

рованных преступлений в Российской Федерации за период 1991 - 1996 гг. [13, с.128], представленной в таблице 1. Выбор данного примера обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, по данным ВЦИОМ [14] проблема роста преступности входит в число наиболее важных проблем, волнующих россиян. Во-вторых, не известно общее число совершенных преступлений в Российской Федерации, но его можно косвенно оценить, используя модель (1).

*Таблица 1.*

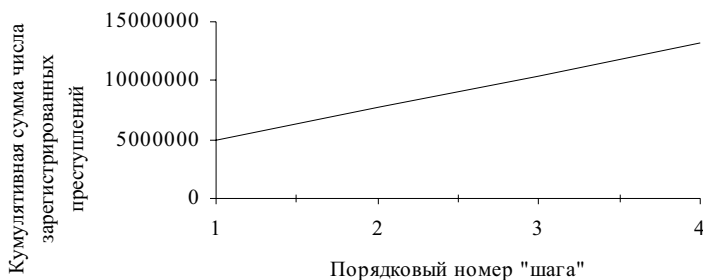
ДИНАМИКА ЧИСЛА ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ ПРЕСТУПЛЕНИЙ  
В РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Год	Число зарегистрированных преступлений	Кумулятивная сумма
1991	2167964	
1992	2760652	4928616
1993	2799614	7728230
1994	2632708	10360938
1995	2755669	13116607
1996	2625081	15741688

На рисунке 12 представлена кумулятивная сумма из таблицы 1 за период 1992-1995 гг. Отметим, что 1991 и 1996 год мы не включали в рассмотрение, оставив данные периоды времени для последующей проверки построенных моделей.

Рисунок 12 показывает, что наблюдается линейный рост кумулятивного числа зарегистрированных преступлений. Как показали проведенные нами ранее численные эксперименты, данная динамика может быть обусловлена линейным ростом  $k$

или  $N$ , или их одновременным линейным ростом. Примем, что величина  $N$  - общее число совершенных преступлений. Поскольку величины  $k$  и  $N$  неизвестны, то для их вычисления мы использовали программу оптимизации Solver из пакета Microsoft Excel, изменяя начальные значения и шаг увеличения параметров  $k$  и  $N$ , где в качестве ограничений выступали наблюдаемые величины кумулятивного числа зарегистрированных преступлений из таблицы 1. Результаты вычислений показали, что хорошее согласование с реально наблюдаемыми данными могут иметь модели, в которых механизм изменения параметров  $k$  и  $N$  существенно различается. В качестве примера в таблице 2 представлены пять моделей, в которых параметры  $k$  и  $N$  изменяются различным образом.



**Рис. 12.** Кумулятивная сумма числа зарегистрированных преступлений в Российской Федерации за период 1992-1995 гг.

**Таблица 2.**

ПАРАМЕТРЫ ПЯТИ МОДЕЛЕЙ

	Начальное значение $N$	Шаг увеличения $N$	Начальное значение $k$	Шаг увеличения $k$	Величина приближения данных к модели ( $R^2$ )
Модель 1	18876026	$N = const$	0,229954	0,003105	0,9882
Модель 2	11292830	1000	0,436438	0,003393	0,9912
Модель 3	36582268	4000	0,105045	$k = const$	0,9978
Модель 4	26311148	943057	0,146739	$k = const$	0,9979
Модель 5	11268268	1491654	0,437389	0,0034	0,9907

Проверим теперь построенные нами модели на их прогностическую способность по 1996 году, который мы не включали в анализ. Результаты прогноза представлены в таблице 3.

**Таблица 3.**

**СРАВНЕНИЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ  
ПЯТИ МОДЕЛЕЙ ПО 1996 ГОДУ**

	Прогноз	Кумулятивная сумма числа зарегистрированных преступлений в 1996 году	Относительная погрешность прогноза, %
Модель 4	15606288	15741688	0,86
Модель 5	14973907	15741688	4,9
Модель 1	13968357	15741688	11,3
Модель 3	18338897	15741688	16,5
Модель 2	10691589	15741688	32,1

Проверим теперь построенные нами модели на их прогностическую способность по 1991 году, который мы не включали в анализ. Данный прогноз традиционно называют ретропрогнозом, то есть прогнозом назад. Для этой цели мы вычитали из кумулятивной суммы зарегистрированных преступлений из моделей 1-5 за 1991-1992 гг. реальное число зарегистрированных преступлений за 1992 год. Результаты ретропрогноза представлены в таблице 4.

**Таблица 4.**

**СРАВНЕНИЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПЯТИ  
МОДЕЛЕЙ ПО 1991 ГОДУ**

	Ретропрогноз	Число зарегистрированных преступлений в 1991 году	Относительная погрешность ретропрогноза, %
Модель 5	2167964	2167964	0,0
Модель 2	2167968	2167964	0,0002
Модель 1	1579966	2167964	27,1
Модель 4	1100220	2167964	49,3
Модель 3	1082132	2167964	50,1

Из таблиц 3-4 следует, что по сумме относительных ошибок прогноза и ретропрогноза модель 5 показала наилучшие результаты. По результатам модели 5 в 1991 году на 2167964 зарегистрированных преступления приходилось 9776614 совершенных преступлений, то есть регистрировалось примерно только каждое 4 совершенное преступление. В какой мере полученный нами результат соответствует оценкам криминологов? Из исследований Д.А.Ли [13, с. 50; 15, с. 117] вытекает, что в России регистрируется примерно только каждое третье - четвертое совершенное преступление. Таким образом, полученный нами результат согласуется с оценками криминологов. Следовательно, можно предполагать, что модель 5 адекватно отражает закономерности динамики числа преступлений в Российской Федерации за период 1991-1996 гг.

В качестве другого содержательного примера рассмотрим данные опросов общественного мнения, проводимых Фондом общественного мнения (ФОМ) [16], в частности, динамику доли опрошенных, считающих, что следующий год будет лучше, чем уходящий, за период 1994 - 1998 гг. Для выявления значений коэффициента  $k$  мы использовали программу оптимизации Solver из пакета Microsoft Excel. На рисунке 13 представлена модель (1)

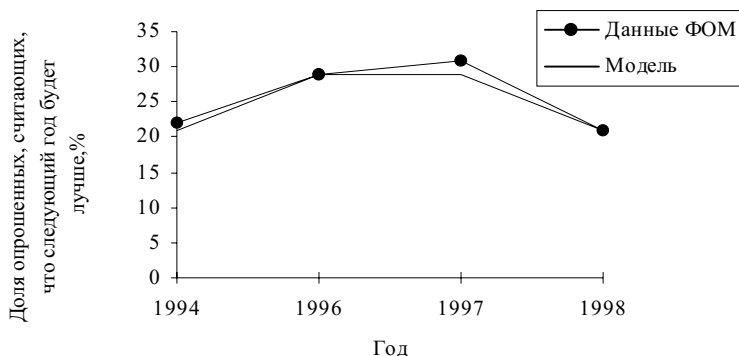


Рис. 13. Соответствие между моделью и наблюдаемой динамикой

при следующих значениях параметров:  $N=const=100$ ,  $k_1=0,208693$ ,  $k$  уменьшается с шагом 0,10594. Согласованность модели с данными ФОМ составляет  $R^2=0,97$ .

Подводя итог рассмотрению некоторых приложений модели (1) можно отметить следующее. По наблюдаемой динамике какого-либо социального процесса можно вычислить параметры модели (1) и таким образом приблизиться к пониманию количественных закономерностей его функционирования.

### *Выводы*

1. Предложенная математическая модель социальной динамики может генерировать основные виды социальных процессов: социальную диффузию, процессы “жизненного цикла”, процессы “распада”, циклические процессы

2. По наблюдаемой динамике какого-либо социального процесса можно вычислить параметры модели и таким образом приблизиться к пониманию количественных закономерностей его функционирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотинский Ю.М.* Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. М.:Логос, 1998.
2. *Шведовский В.А.* Моделирование распространения информации в смежных социальных группах//Математические методы в социологическом исследовании. М.:Наука, 1983. С. 207-215.
3. *Давыдов А.* Два подхода к моделированию формирования общественного мнения//Актуальные проблемы общественного мнения. М.:ИСАН, 1990. С. 87-92.
4. *Паповян С.С.* Математические методы в социальной психологии. М.: Наука, 1983.
5. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.:Наука, 1987.
6. *Mayntz R.* Social discontinuity//Interdisciplinary science rev., 1989. Vol. 14. №1. P. 4-15.



7. Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем. М.:Мысль, 1978.
8. Хакен Г. Синергетика. М.:Мир, 1980.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.:Мир, 1988.
10. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.:Постмаркет, 2000.
11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.:Наука, 1979.
12. Давыдов А.А. Модульный анализ и конструирование социума. М.: ИСАН, 1994.
13. Ли Д.А. Уголовно-статистический учет: структурно-функциональные закономерности. М.:Русский мир, 1998.
14. Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены, 1999. №5.
15. Ли Д.А. Преступность в структуре общества. М.:Русский мир, 2000.
16. <http://www.fom.ru>