
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАКОНОВ НА ЭМПИРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ТЕСТИРОВАНИЕ СИСТЕМ АКСИОМ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.Е.Витяев, А.Д.Логвиненко

(Новосибирск)

Работа лежит в русле аксиоматико-репрезентативного подхода теории измерений. Этот подход активно развивается на Западе. В последние годы потребности практики обусловили необходимость отказа от строгих положений теории измерений, восходящих к идеям Стивенса, Суппеса, Пфанцагля и т.д. (для широких кругов социологов эти идеи аккумулированы в известных понятиях номинальной, порядковой, интервальной шкал). Основное внимание стало уделяться анализу специфики встречающихся на практике эмпирических систем (ЭС). Было показано, что особенности этих систем отнюдь не ограничиваются теми свойствами, которые отражаются с помощью шкал известных типов. Появилась идея отражать реальные свойства ЭС с помощью так называемых аксиом. В предлагаемой статье анализируются аксиомы, с помощью которых могут задаваться ЭС, интересующие социолога. Для формулировки этих аксиом используется язык узкого исчисления предикатов, формулы которого имеют вид высказываний, типичных для эмпирической социологии: утверждающих, что некоторые признаки принимают определенные значения. Авторы показывают, как можно искать подобные аксиомы эмпирическим путем.

Ключевые слова: теория измерений, аксиома, аксиоматически-репрезентационный подход, узкое исчисление предикатов, закон, эксперимент, событие, вероятность, вероятностный закон, тестирование аксиом, модель шумов.

Введение. Постановка проблемы.

Теория измерений базируется на аксиоматическо-репрезентационном подходе к измерениям ("Axiomatic-Representational Viewpoint in Measurement" [2, p.201]). Основным постулатом этого подхода является предположение о существовании эмпирической системы.

Разработка каждой конкретной аксиоматико-репрезентативной теории требует решения трех проблем - одной концептуальной и двух математических (существования и единственности). Концептуальная проблема состоит в выборе примитивов - множества эмпирических отношений и операций, и системы аксиом, которой они должны удовлетворять.

Решение концептуальной проблемы - выбор примитивов и системы аксиом мы разобьем на две самостоятельные проблемы:

1. выбор примитивов (множества отношений и операций) и выбор основного множества объектов (генеральной совокупности объектов);
2. выбор системы аксиом.

Первая из упомянутых проблем - выбор эмпирических отношений, операций и генеральной совокупности объектов фиксирует, в соответствии с основным постулатом теории измерений, некоторую эмпирическую систему (класс эмпирических систем). Об этой эмпирической системе нам ничего не известно, поэтому неизбежно возникает вторая проблема - выбрать некоторую гипотетическую систему аксиом, которой эта эмпирическая система должна удовлетворять.

Покажем, что объединение этих двух проблем в одну концептуальную проблему, принятое в теории измерений, приводит к смешению нескольких принципиально различных уровней рассмотрения.

Во-первых, эти две проблемы различны в том отношении, что, фиксируя примитивы и множество объектов, мы фактически задаем некоторую неизвестную нам, но реальную и объективно существующую эмпирическую систему (класс эмпирических систем), в то время как выбор системы аксиом является чисто гипотетическим и задает некоторый гипотетический класс эмпирических систем. А priori, до всякой экспериментальной проверки объективно существующая эмпирическая система и гипотетический класс эмпирических систем, строго говоря, никак не связаны. Подтвердить, что реальная эмпирическая система действительно, в каком-то смысле, принадлежит классу гипотетических эмпирических систем могут только методы тестирования систем аксиом.

Во-вторых, первая проблема - проблема выбора примитивов и основного множества объектов является проблемой эмпирического уровня, в то время как проблема задания системы аксиом есть проблема теоретического уровня, решаемая в рамках аксиоматического подхода. Смешение этих двух проблем в одну концептуальную проблему вводит неявное предположение, что эмпирическая система так же задается на теоретическом уровне и представляет собой некоторую математическую структуру (класс структур), на которой данная система аксиом должна быть истинной. Это противоречит самой сути эмпирической системы. Фактически в теории измерений предполагается, что учет шумов, неточностей приборов, предрасположенностей испытуемого и т.д. не дело теории измерений. Теория измерений, ввиду ее аксиоматического подхода к исследуемой реальности, должна основываться на идеализированных эмпирических системах, в том смысле, что значения предикатов на объектах однозначно определены и не подвержены шумам, неточностям приборов, предрасположенностям испытуемого и т.д. На самом деле, мы

никогда не имеем фиксированной и неизменной реальной эмпирической системы, как она определена в проблеме 1. Она постоянно меняется со временем и, например, в случаях ответов испытуемого, может меняться очень быстро. Даже если мы имеем дело не с испытуемым, а с некоторым физическим экспериментом, то все равно наличие разнообразных шумов не позволяет надеяться на постоянство значений отношений и операций на одних и тех же объектах, что исключает существование фиксированной реальной эмпирической системы. Теоретической же модели для представления реальности такой, какая она есть и как она сформулирована в проблеме 1, в теории измерений до настоящего времени не существует.

В-третьих, аксиоматический метод и требование истинности систем аксиом на эмпирической системе неизбежно влекут принцип фальсифицируемости при проверке аксиом на эмпирической системе. На самом деле этот принцип применим только в тех теориях, где нам известны все законы строения используемых приборов, включая модели шумов. Только тогда мы в состоянии точно рассчитать, когда отклонения приборов допустимы и являются следствием шумов, а когда они действительно означают отклонения от теоретически вычисленных значений. Но этот принцип сильно ограничивает область применимости теории измерений, так как это невозможно сделать, например, для испытуемого, а также практически во всех остальных областях (кроме физики, где теория измерений не нужна).

Приведенные рассуждения ставят следующие проблемы.

1. Как теоретически описать объективно существующую реальность на эмпирическом уровне (проблема 1), не привлекая гипотетические предположения о системе аксиом?

2. Как системы аксиом не предполагать *a priori*, а некоторым образом открывать на эмпирической системе?

3. На что можно заменить принцип фальсифицируемости при проверке систем аксиом?

В данной работе предполагается следующим образом ответить на эти вопросы:

1. эмпирический уровень описывать путем формализации понятия эксперимента;

2. системы аксиом обнаруживать на множестве экспериментов как законы этих экспериментов;

3. понятие истинности заменить на некоторую оценку (предсказания, вероятности и т.д.) закона. Вместе с понятием истинности исчезает и принцип фальсифицируемости. Главным же в понятии закона является не оценка (и, в частности, не истинность), а его простота и неупрощаемость, которые свойственны законам природы.

В целом предлагаемый подход позволяет взглянуть на теорию измерений с точки зрения направления Scientific Discovery и не тестировать известные системы аксиом, а открывать их как законы исследуемой реальности.

Что такое закон

Мы будем различать, следуя [2, p.251], design axiom, technical axiom, empirical axiom и idealized axiom¹. Прямому тестированию на реальных данных подлежат только эмпирические аксиомы: “Empirical axioms. The axioms that are ordinarily tested under some standart interpretation of primitive concepts of the measurement theory form the most important class, the one that is real focus of analysis. It is presumably the objective of particular experiments to test particular axioms...”² В

¹ Описательная аксиома, техническая аксиома, эмпирическая аксиома и идеализированная аксиома.-Пер. с англ.

² Эмпирические аксиомы. Эмпирические аксиомы, обычно тестируемые с позиций общепринятой интерпретации примитивных концепций теории измерения, образуют наиболее важный класс, являющийся точкой концентрации проводимого анализа. Предположительно, он [этот класс] является объектом данного

дальнейшем, при рассмотрении тестируемости систем аксиом мы имеем в виду только тестирование эмпирических аксиом. Как тестировать остальные типы аксиом и как находить эмпирические процедуры для проверки других аксиом описано в [2]. Наш подход к тестированию аксиом в этом технически более сложном случае, включающем функциональные символы и кванторы существования, рассмотрен в [10].

Далее мы будем предполагать, что система аксиом Σ представляет собой совокупность универсальных формул (содержащих только кванторы всеобщности) без функциональных символов. В [10] показано, что такая система аксиом Σ может быть логически эквивалентными преобразованиями сведена к совокупности формул вида:

$$C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0), \quad (1)$$

где $A_j = P_j (x_{11}^j, \dots, x_{p_j}^j)^{\varepsilon_j}$, $j = 0, 1, \dots, k$,
 $x_{10}^0, \dots, x_{n_0}^0$, $x_{11}^1, \dots, x_{n_1}^1$, ..., $x_{1k}^k, \dots, x_{n_k}^k$ - свободные переменные;
 n_0, n_1, \dots, n_k - местности предикатных символов P_0, P_1, \dots, P_k ;
 символы $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ - означают наличие (0)/отсутствие (1) отрицания.

Далее мы будем предполагать, что система аксиом представляет собой совокупность формул вида (1), которые будем называть **правилами**.

Традиционно задача тестирования систем аксиом Σ на некоторой эмпирической системе M состоит в следующем:

Задача 1: Определить, истинна ли система аксиом Σ на эмпирической системе M .

Проанализируем эту задачу. Что можно сказать об истинности системы аксиом Σ на эмпирической системе M , опираясь только на логический анализ системы аксиом? Можно сказать, во-первых, что правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow \Rightarrow A_0)$ может быть истинным на эмпирической системе только потому, что посылка правила всегда ложна. На самом деле, как мы покажем, это означает, что на эмпирической системе истинно некоторое

конкретного эксперимента, проводимого с целью тестирования вышеуказанных аксиом.-Пер. с англ.

логически более сильное "подправило", связывающее между собой атомы посылки. Во-вторых, правило С может быть истинно на эмпирической системе только потому, что некоторое его логически более сильное "подправило", содержащее только часть посылки и то же заключение, истинно на эмпирической системе. Система аксиом может оказаться истинной на эмпирической системе потому, что фактически на эмпирической системе истинна некоторая система подправил данной системы аксиом, из истинности которой, в свою очередь, следует истинность системы аксиом. Какие из подправил будут фактически истинны на эмпирической системе мы заранее не знаем, но все такие подправила вместе с самой системой аксиом S мы будем считать **гипотезами** для проверки на эмпирической системе.

Из логики и методологии науки хорошо известно, что те из гипотез следует считать **законами**, которые при одинаковой их подтвержденности на экспериментальных данных наиболее фальсифицируемы, просты и/или содержат наименьшее число "параметров". В нашем случае все эти свойства, которые обычно трудно точно определить, следуют из определения логической силы высказывания. "Подправило" является одновременно и логически более сильным высказыванием, чем само правило, и более фальсифицируемым, так как содержит более слабую посылку и, следовательно, применимо к большему объему данных и тем самым в большей степени подвержено фальсификации; и более простым, так как содержит меньшее число атомарных высказываний, чем правило; и включает меньшее число "параметров", так как лишние атомарные высказывания тоже можно считать параметрами "подстройки" высказывания под данные.

Почему же закон должен быть наиболее фальсифицируемым, простым и содержать наименьшее число параметров? Разные авторы придерживаются различных мнений на этот счет, либо не объясняют этого вообще. Очевидно одно, что это нужно для того, чтобы максимально близко подойти к реальным данным и наиболее точно отразить

реальные зависимости в данных, а не наши гипотезы о них. В нашем случае для гипотез вида (1) мы можем более точно ответить на этот вопрос. Так как все описанные свойства закона вытекают из логической силы высказывания, то поиск логически наиболее сильных "подправил", истинных на эмпирической системе, позволяет нам не только проверить гипотезу об истинности системы аксиом, но и решить другую принципиально более важную задачу: выяснить, а какова на самом деле та наиболее сильная (логически) теория, вытекающая из этих правил, которая описывает наши данные и, возможно, лежит в основании неизвестного нам закона их порождения? Решение этой **задачи обнаружения закона в данных** или, что то же самое, поиска сильнейшей теории в данных как раз и требует нахождения среди всех правил вида (1) логически наиболее сильных (среди истинных на эмпирической системе). Именно такие правила в соответствии с существующими представлениями следует считать законами эмпирической системы.

Такая постановка задачи принципиально меняет и исходную задачу тестирования систем аксиом. Тестирование систем аксиом, как оно понимается в теории измерений, это либо фальсифицируемость, либо статистический вывод. Фальсифицируемость, как это представлено в теории измерений, не предполагает поиска более простого и логически более сильного и так же не фальсифицируемого утверждения. Тем самым нефальсифицированное на имеющихся данных утверждение принимается в качестве гипотезы, несмотря на то, что оно может содержать некоторые дополнительные условия, которые без ущерба для нефальсифицируемости можно было бы удалить из него. Это означает, что эти дополнительные условия есть лишь наша гипотеза, не имеющая эмпирического содержания. Поэтому поиск логически наиболее сильных правил, являющихся законами, обладает тем преимуществом, что они не содержат в себе лишних, не имеющих эмпирического содержания атомов. Статистический вывод или статистическая проверка гипотез так же не предполагают

поиска логически более сильного утверждения, хотя очевидно, что логически более сильное утверждение применимо к большему объему данных и, следовательно, имеет большую статистику для получения более достоверного статистического вывода. **Отсюда вывод: исходная постановка задачи 1 тестирования систем аксиом, принятая в теории измерений, заменяется нами на задачу обнаружения законов и поиска наиболее сильной теории эмпирических систем**, которую мы сформулируем ниже. Решение задачи 1 в этом случае получается как частный случай задачи обнаружения законов.

Для дальнейших рассмотрений необходимо выделить фрагмент языка первого порядка $L(\Sigma)$, содержащий только внелогические символы системы аксиом Σ . Сигнатурой $\mathfrak{S}(\Sigma)$ языка $L(\Sigma)$, будем называть набор $\mathfrak{S}(\Sigma) = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$, где P_1, \dots, P_k - все предикатные символы, встречающиеся в аксиомах Σ ; n_1, \dots, n_k - местности соответствующих предикатных символов; $X(\Sigma) = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ - множество всех свободных переменных, входящих в Σ ; $U(\Sigma)$ - множество всех атомарных формул (атомов) вида $P(x_1, \dots, x_n)$, $x_1, \dots, x_n \in X(\Sigma)$, входящих в аксиомы из Σ ; $\mathfrak{R}(\Sigma)$ - множество утверждений языка $L(\Sigma)$, полученное замыканием множества $U(\Sigma)$ относительно логических операций $\&, \vee, \neg$. На элементах булевой алгебры $\mathfrak{R}(\Sigma)$ определено тождество утверждений. Будем предполагать, что логические константы $\text{И} \equiv A \vee \neg A$ и $\text{Л} \equiv A \& \neg A$ всегда принадлежат $\mathfrak{R}(\Sigma)$. Так как число переменных и атомарных формул конечно, то и алгебра $\mathfrak{R}(\Sigma)$ конечна.

Пусть у нас есть некоторая эмпирическая система $M = \langle A, W \rangle$, где A - основное множество эмпирической системы, а $W = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$, $k > 0$ - множество предикатов, определенных на A . Каждый предикат P_j местности n_j определяет подмножество $P \subseteq A_1 \times \dots \times A_{n_j} = A$ наборов объектов, на которых он истинен. Под истинностью системы аксиом Σ на эмпирической системе M будем понимать стандартное определение истинности высказываний на моделях.

Выясним из истинности каких логически более сильных "подправил" на эмпирической системе M следует истинность

самого правила. Тем самым мы получим определение "подправил" и определение закона для эмпирической системы М.

Теорема 1.1. Правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ логически следует (в исчислении высказываний) из любого правила вида:

1. $A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}$,
 где $\{A_{i1}, \dots, A_{ih}, A_{i0}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}$, $0 \leq h < k$, т.е.
 $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1 \& \dots \& A_k) \vdash (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$;
 - доказуемость в исчислении высказываний.
2. $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow A_0)$,
 где $\{A_{i1}, \dots, A_{ih}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}$, $0 \leq h < k$, т.е.,
 $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$.

Доказательство: Докажем сначала первую цепочку выводов. $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \equiv (\neg(A_{i1} \& \dots \& A_{ih}) \vee \neg A_{i0}) \equiv (\neg A_{i1} \vee \dots \vee \neg A_{ih} \vee \neg A_{i0}) \equiv \neg(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \& A_{i0})$. Так как $\{A_{i1}, \dots, A_{ih}, A_{i0}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}$, то конъюнкция $A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \& A_{i0}$ является частью конъюнкции $A_1 \& \dots \& A_k$. Из аксиомы алгебры высказываний $A \& B \vdash A$ по правилу modus ponense следует, что $A_1 \& \dots \& A_k \vdash A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \& A_{i0}$. Поэтому из формул $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0})$, $A_1 \& \dots \& A_k$ выводится противоречие $\neg(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \& A_{i0}) \& (A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \& A_{i0})$. Отсюда следует, что $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1 \& \dots \& A_k)$. Докажем, что $\neg(A_1 \& \dots \& A_k) \vdash (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$. Так $\neg(A_1 \& \dots \& A_k) \equiv \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k$, то по правилу алгебры высказываний $A \vdash A \vee B$ выводим, что $\neg(A_1 \& \dots \& A_k) \vdash (\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k \vee A_0) \equiv (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$.

Докажем, что $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$, если $\{A_{i1}, \dots, A_{ih}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}$, $0 \leq h < k$. Так как $(A_{i1} \& \dots \& A_{ih} \Rightarrow A_0) \equiv (\neg A_{i1} \vee \dots \vee \neg A_{ih} \vee A_0)$, то из схемы аксиом $A \vdash A \vee B$ алгебры высказываний и правила modus ponens следует, что $(\neg A_{i1} \vee \dots \vee \neg A_{ih} \vee A_0) \vdash (\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k \vee A_0) \equiv (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$.

Определение 1.1. Подправилом некоторого правила C будем называть любое из логически более сильных правил вида 1 или 2, определенных в теореме 1.1 для правила C .

Как легко видеть, любое подправило также имеет вид (1). Обозначим через $S\text{Sub}(\Sigma)$ множество всех подправил вместе с самими правилами системы аксиом Σ .

Следствие 1.1. Если некоторое подправило правила C истинно на эмпирической системе M , то и само правило C истинно на M .

Определение 1.2. **Законом** эмпирической системы $M = \langle A, W \rangle$ будем называть любое истинное на M правило C вида (1), для которого каждое его подправило уже не истинно на M .

Таким образом, от задачи 1 мы переходим к следующей задаче, заменяя тестирование систем аксиом на обнаружение законов эмпирических систем.

Задача 2: Для множества правил $S\text{Sub}(\Sigma)$ определить, какие из них являются законами эмпирической системы $M = \langle A, W \rangle$. После этого проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $S\text{Sub}(\Sigma)$, являющееся законом эмпирической системы M . Если да, то в силу следствия 1.1 система аксиом выполнена на M .

Понятие эксперимента. Определение закона на множестве всех возможных экспериментов

Свяжем проверку истинности системы аксиом на эмпирической системе M с конкретными конечными экспериментами, на которых эта истинность проверяется. Тем самым мы не просто сделаем проверку аксиом более конструктивной, а заменим задачу, которую можно выполнять только на теоретическом уровне на задачу чисто эмпирической проверки. Понятие эксперимента заменяет идеализированные эмпирические системы на действительно эмпирические.

Под интерпретацией языка $L(\Sigma)$ на эмпирической системе $M = \langle A, W \rangle$ будем понимать два отображения: интерпретацию сигнатурных символов $I(M): \mathfrak{Z}(\Sigma) \rightarrow W$, сопоставляющую каждому сигнатурному символу $P_j \in \mathfrak{Z}(\Sigma)$, $j = 1, \dots, k$, местности p_j некоторый предикат P_j из W той же местности, и интерпретацию переменных $I: X(\Sigma) \rightarrow X(A)$, сопоставляющую взаимнооднозначно всем свободным переменным $X(\Sigma) = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ языка $L(\Sigma)$ переменные по основному множеству A эмпирической системы M , представленные набором $X(A) =$

$\langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Под состоянием $s: X(A) \rightarrow A$ будем понимать отображение набора переменных $X(A) = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ в набор объектов $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ из A (не все объекты обязательно различны). Множество всех возможных состояний обозначим через S .

Определим неформально, что такое эксперимент. Эксперимент состоит в том, чтобы при заданной интерпретации $I(M): \mathfrak{Z}(\Sigma) \rightarrow W$ предикатных символов и заданной интерпретации I переменных, выбрать из основного множества A некоторый набор объектов $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и подставить их вместо переменных $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Далее определить значения истинности всех атомарных формул на $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$.

Эксперимент определим как набор

$$\text{Exp}(s) = \text{Exp}(I(M)I(X(\Sigma)), s) = \langle \langle a_1, \dots, a_m \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle,$$

где $s \in S$, $s(X(A)) = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$; $I(M)I(X(\Sigma))s$ - суперпозиция интерпретации $I(M)$ предикатных символов, интерпретации $I(X(\Sigma))$ переменных и состояния s . Эта суперпозиция задает интерпретацию предикатных переменных в предикаты на эмпирической системе и подставляет вместо символов переменных набор объектов из основного множества эмпирической системы, что определяет конкретные значения истинности этих предикатов на данном наборе объектов. Поскольку для данной эмпирической системы M интерпретации $I(M)$, $I(X(\Sigma))$ предикатных символов и переменных фиксированы, то эксперимент также будем обозначать через $\text{Exp}(s)$. Запись $\langle \langle a_1, \dots, a_m \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle$, как и в случае моделей, означает, что значения истинности атомарных высказываний на объектах набора $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ определены. Таким образом, запись $\langle \langle a_1, \dots, a_m \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle$ представляет собой набор значений истинности всех атомарных высказываний на объектах из $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$. Например, для $W = \{\sim\}$ и объектов $\langle a, b, c \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \langle a, b, c \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle = & \langle (a \sim a) = И, (b \sim b) = И, (c \sim c) = И, \\ & (a \sim b) = Л, (a \sim c) = И, (b \sim c) = И, \\ & (b \sim a) = Л, (c \sim a) = И, (c \sim b) = Л \rangle. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что порядок атомарных отношений в наборе $\langle\langle a, b, c \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s\rangle$ всегда фиксирован, поэтому, если взять только набор значений истинности $\langle I, I, I, L, I, I, L, I, L \rangle$ или будем говорить - бинарный вектор ε для соответствующего эксперимента, то этот вектор однозначно охарактеризует результаты эксперимента. Вектор можно представить как вершину девятимерного двоичного куба $\{0,1\}^9$. Полученный вектор $\varepsilon(\text{Exp}(s))$ будем называть **значением эксперимента** $\text{Exp}(s)$.

Пусть у нас есть некоторый эксперимент $\text{Exp}(s)$, множество значений которого представляет собой двоичный куб E . Рассмотрим взаимосвязь куба E и булевой алгебры $\mathfrak{R}(\Sigma)$. Как известно, любое утверждение из $\mathfrak{R}(\Sigma)$ есть дизъюнкция элементарных конъюнкций атомов или их отрицаний из $U(\Sigma)$. Следовательно, во-первых, значение истинности любого утверждения $A \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ на эксперименте $\text{Exp}(s)$ определено и вычисляется по правилам алгебры высказываний, во-вторых, любому утверждению $A \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ соответствует некоторое подмножество $E(A) \subseteq E$ векторов, на котором (и только на котором) оно истинно. Так как $I \equiv A \vee \neg A$ и $L \equiv A \& \neg A$ всегда принадлежат $\mathfrak{R}(\Sigma)$, то всему множеству E и пустому подмножеству \emptyset вершин так же соответствуют некоторые высказывания из $\mathfrak{R}(\Sigma)$. Поэтому, фактор алгебра $\mathfrak{R}(\Sigma)/\equiv$ высказываний и множество всех подмножеств двоичного куба E изоморфны соответственно относительно логических операций на $\mathfrak{R}(\Sigma)/\equiv$ и теоретико множественных операций на E . Каждому бинарному вектору $\varepsilon(\text{Exp}(s)) = \langle I, I, I, L, I, I, L, I, L \rangle \in E$, представляющему собой результаты некоторого эксперимента, будет соответствовать при таком изоморфизме элементарная конъюнкция $(a \sim a) \& (b \sim \sim b) \& (c \sim c) \& \neg(a \sim b) \& (a \sim c) \& (b \sim c) \& \neg(b \sim a) \& (c \sim a) \& \neg(c \sim b) \in \mathfrak{R}(\Sigma)$, описывающая результаты соответствующего эксперимента, которую будем обозначать через $A(\text{Exp}(s))$.

Определим для эмпирической системы M множество всех возможных экспериментов $\text{Exp} = \{\text{Exp}(s) \mid s \in S\}$.

Определение 2.1. Формула $C \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ истинна на $\text{Exp}(s)$ (будем писать $\text{Exp}(s) \models C$), тогда и только тогда, когда при определенном в эксперименте $\text{Exp}(s)$ наборе значений истинности $\varepsilon(\text{Exp}(s))$, формула C истинна. Иначе говоря, формула $C \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ истинна на $\text{Exp}(s)$, если $\varepsilon(\text{Exp}(s)) \in E(C)$.

Определение 2.2. Формула $C \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ **истинна** на Exp тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте $\text{Exp}(s) \in \text{Exp}$.

Лемма 2.1. Формула $C \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ истинна на эмпирической системе M (при классическом определении истинности высказываний на модели) тогда и только тогда, когда она истинна на Exp .

Определение 2.3. Система аксиом Σ истинна на Exp тогда и только тогда, когда каждая аксиома из Σ истинна на Exp .

Определение 2.4. **Законом на Exp** будем называть любое истинное на Exp правило C вида (1), каждое подправило которого уже не истинно на Exp .

Теорема 2.1. Правило C вида (1) является законом эмпирической системы $M = \langle A, W \rangle$ тогда и только тогда, когда оно является законом на Exp .

Задача 2 переформулируется в результате следующим образом:

Задача 3: Для множества правил SSub определить, какие из них являются законами на Exp . После этого проверить, для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из SSub , являющееся законом на Exp .

События и вероятности событий

Сделаем следующий шаг обобщения: будем предполагать, что объекты для экспериментов выбираются некоторым случайным образом из основного множества A эмпирической системы как из генеральной совокупности объектов. Это позволит нам ввести вероятность на множестве экспериментов, не меняя пока определения эксперимента как некоторого "фрагмента" эмпирической системы.

Определим вероятность m на E .

Определение 3.1. Вероятностью на E будем называть отображение $m: E \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

$$3.1.1. \sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon) = 1.$$

$$\varepsilon \in E$$

$$3.1.2. m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{\text{Exp}(s) \mid \varepsilon(\text{Exp}(s)) = \varepsilon\} = \emptyset.$$

Смысл условия 3.1.2 объясняется леммой 3.2. Он состоит в том, что вероятность должна быть согласована с истинностью высказываний: если высказывание A тождественно истинно на M , то его вероятность должна быть равна 1, если же оно тождественно ложно, то его вероятность должна быть равна 0.

Определение 3.2. Событием в эксперименте $\text{Exp}(s)$ будем называть любое подмножество $E(A) \subseteq E$, $\varepsilon(\text{Exp}(s)) \in E(A)$, $A \in \mathfrak{R}(\Sigma)$. Вероятностью m события $E(A)$ будем называть величину $m(E(A)) = \sum_{\varepsilon \in E(A)} m(\varepsilon)$.

$$\varepsilon \in E(A)$$

Будем говорить, что в результате эксперимента $\text{Exp}(s)$ произошло событие $E(A)$ или событие A , если $\varepsilon(\text{Exp}(s)) \in E(A)$. Событие A является элементом булевой алгебры $\mathfrak{R}(\Sigma)$, которую мы так же будем называть булевой алгеброй событий. Вероятность m индуцирует вероятность на булевой алгебре $\mathfrak{R}(\Sigma)$.

Лемма 3.1. Функция $n(A) = m(E(A))$, $A \in \mathfrak{R}(\Sigma)$, определенная на $\mathfrak{R}(\Sigma)$, является **вероятностью на $\mathfrak{R}(\Sigma)$** , то есть для любых $A, B \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ функция n удовлетворяет следующим аксиомам [7] (\vdash - доказуемость в исчислении высказываний):

$$3.1.1. n(A \vee B) + n(A \& B) = n(A) + n(B);$$

$$3.1.2. n(\neg A) = 1 - n(A);$$

$$3.1.3. \text{Если } \vdash A \equiv B, \text{ то } n(A) = n(B);$$

$$3.1.4. \text{Если } \vdash A, \text{ то } n(A) = 1.$$

Но не только при доказуемости высказывания его мера должна быть равна 1. Из условия 3.1.2 определения 3.1 вероятности следует, что и при истинности любого высказывания A на эмпирической системе M , оно должно иметь вероятность, равную 1.

Лемма 3.2. Для любого высказывания $A \in \mathfrak{R}(\Sigma)$ выполнены следующие условия:

$$3.2.1. M \vdash A \Leftrightarrow n(A) = 1;$$

$$3.2.2. M \vdash \neg A \Leftrightarrow n(A) = 0;$$

Доказательство: Докажем, что условия 3.2.1 и 3.2.2 эквивалентны. Подставим в 3.2.1 вместо высказывания A высказывание $\neg A$, получим: $M \vdash \neg A \Leftrightarrow n(\neg A) = 1 \Leftrightarrow (1 - n(A)) = 1 \Leftrightarrow n(A) = 0$. Докажем теперь условие 3.2.2. Пусть $M \vdash \neg A$, тогда A всюду ложно на M и, значит, в силу леммы 2.1 A ложно на Exp . Отсюда, в силу определения 2.2, A ложно на каждом эксперименте из Exp , поэтому для каждого $\varepsilon \in E(A)$ $\{\text{Exp}(s) \mid \varepsilon(\text{Exp}(s)) = \varepsilon\} = \emptyset$ и $m(\varepsilon) = 0$, откуда следует, что $n(A) = 0$. Обратное доказательство получается обратным ходом рассуждения.

Определение вероятностного закона на Exp

Введем определение вероятностного закона путем обобщения понятия закона на вероятностный случай. Сделаем это так, чтобы понятие закона на Exp было частным случаем этого более общего определения.

Вспомним определение закона на Exp . Законом на Exp является истинное на Exp правило, все подправила которого ложны на Exp . Можно иначе переформулировать понятие закона на Exp . Законами являются такие правила, истинные на Exp , которые нельзя более упростить и/или логически усилить, сохраняя их истинность. Это свойство неупрощаемости позволяет сформулировать закон не только в терминах

истинности, но и вероятности, и тем самым перекинуть мост между детерминированным и вероятностным случаями.

Теорема 4.1. Для правила $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1) следующие два условия эквивалентны:

1. правило C является законом на Exp ;

2а. условная вероятность $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k)$ правила определена (т.е. $p(A_1 \& \dots \& A_k) > 0$) и $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k) = 1$;

б. условная вероятность $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Доказательство: Приведено в приложении.

Теорема 4.1. дает нам эквивалентное определение закона на Exp в терминах вероятностей.

Определение 4.1. **Вероятностным законом на Exp в детерминированном случае** (для вероятностей удовлетворяющих определению 3.1) будем называть правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условиям:

а) условная вероятность $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k)$ правила определена (т.е. $p(A_1 \& \dots \& A_k) > 0$) и $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k) = 1$;

б) условная вероятность $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Следствие 4.1. Вероятностный закон на Exp в детерминированном случае является законом эмпирической системы M .

Доказательство: Следует из теорем 2.1 и 4.1.

Задача тестирования систем аксиом теперь сводится к задаче обнаружения вероятностных законов в детерминированном случае.

Задача 4: Проверить, для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из SSub , являющееся вероятностным законом в детерминированном случае на Exp .

Обобщение понятия вероятностного закона и эксперимента для тестирования систем аксиом в условиях шумов

Определение эксперимента $\text{Exp}(s)$ как некоторого "фрагмента" эмпирической системы не включает в себя всех видов случайностей, которые могут быть в эксперименте и не отражает реальность проведения экспериментов как она есть. Пока что определение вероятности 3.1 в силу условия 3.1.2 исключает возможность искажения значений истинности предикатов. Чтобы обобщить понятие эксперимента на случай, когда возможны ошибки измерения, шумы или ошибки в ответах испытуемого, необходимо ввести все эти случайные искажения в понятие эксперимент.

Известно [6], что в языке первого порядка и, значит, в определенных в языке первого порядка экспериментах, можно ввести несколько типов случайностей:

5.1. Случайности, связанные со случайным выбором стимулов или их случайным поступлением из генеральной совокупности (случайность на области [6]);

5.2. Случайности, вызывающие ошибки в определении значений истинности атомарных высказываний и связанные с ошибками измерения, ошибками в ответах испытуемого, шумами прибора или шумами, воздействующими на испытуемого (случайность на множестве возможных миров [6]).

В случаях 5.1. и 5.2. вероятность может вводиться вообще говоря, различным образом [6], как вероятность на "области" в случае 5.1 или как вероятность на множестве "возможных миров" в случае 5.2. Определение вероятности 3.1. является примером вероятности на "области", так как учитывает только случайности, связанные со случайным выбором стимулов, но в силу свойства 3.1.2 определено для экспериментов, которые являются "фрагментами" эмпирических систем и, следовательно, не содержат случайностей вида 5.2. Чтобы учесть оба типа случайностей 5.1. и 5.2. необходимо

одновременно обобщить определение вероятности и эксперимента.

Определение 5.1. Вероятностью на E назовем отображение $m: E \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

$$5.1.1. \sum m(\varepsilon) = 1.$$

$$\varepsilon \in E$$

Для "детерминированных" экспериментов, должно быть выполнено также следующее условие:

$$5.1.2. m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{\text{Exp}(s) \mid \varepsilon(\text{Exp}(s)) = \varepsilon\} = \emptyset.$$

Эксперимент определим как набор

$$\text{Exp}(s) = F \langle \langle a_1, \dots, a_m \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle,$$

где $F: E \rightarrow E$ - случайное отображение. В случае, когда F - тождественное отображение, будем говорить, что мы имеем "детерминированный" эксперимент, для которого должно быть выполнено условие 5.1.2.

"Детерминированный" эксперимент совпадает со старым определением эксперимента. Данное определение эксперимента $\text{Exp}(s)$ представляет собой случайно искаженный функцией F "фрагмент" эмпирической системы. Характеристики функции F как случайного отображения полностью определяются вероятностью m . Определение вероятности p остается прежним.

Для экспериментов, определенных в дефиниции 5.1 с различными типами случайностей, уже нельзя требовать истинности аксиом на Exp . Поэтому определение закона на Exp теряет свой смысл. Эквивалентное определение вероятностного закона, данное в теореме 4.1, для которого должно быть выполнено условие $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k) = 1$, так же теряет смысл, в силу того, что условная вероятность не может быть равна 1 в экспериментах с шумами. Поэтому необходимо ввести обобщение этого определения путем удаления условия, которое не может быть выполнено.

Определение 5.2. Вероятностным законом на Exp будем называть правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условию:

5.2.1. Условная вероятность $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k)$ правила определена и строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Покажем, что в результате удаления условия $p(A_0/A_1 \& \dots \& A_k) = 1$ из определения 4.1 вероятностного закона для детерминированного случая, мы ничего не потеряли из существа определения закона.

Вспомним, что именно свойство неупрощаемости позволило нам сформулировать определение вероятностного закона в детерминированном случае. Посмотрим на теорему 4.1 с точки зрения **неупрощаемости** закона. В вероятностных терминах свойство неупрощаемости закона звучит уже несколько иначе: для правила, истинного на M , для которого условная вероятность равна 1, неупрощаемость правила означает, что если мы возьмем любое логически более сильное его подправило, то его условная вероятность строго уменьшится и станет строго меньше 1, то есть вероятностный закон на $E_{\text{хр}}$ в детерминированном случае нельзя упростить, не уменьшив существенно его условную вероятность. Поэтому два эквивалентных определения закона, сформулированные в теореме 4.1, могут быть переформулированы в терминах неупрощаемости закона, только одно из них для значения истинности, а другое для условной вероятности. Из этой переформулировки видно, что для понятия закона важны не сама истинность или то, что условная вероятность равна 1, а невозможность его упрощения с сохранением этих оценок (истинности, вероятности и т.д.). Это дает возможность более общего определения закона для правил вида (1), охватывающего как детерминированный, так и вероятностный случай.

5.3. Определение закона: Законом является такое правило S вида (1), характеризуемое некоторой оценкой, что его нельзя "упростить" (логически усилить в соответствии с теоремой 1.1), не уменьшив существенно этой оценки.

Эквивалентность двух различных определений закона с точки зрения данного определения закона для двух различных

видов оценок - **оценки истинности** и **оценки условной вероятности, равной 1**, доказана в теореме 4.1. При переходе от определения 4.1 вероятностного закона в детерминированном случае к определению 5.2 вероятностного закона мы заменили оценку закона с условной вероятности, равной 1, на просто оценку условной вероятности, оставаясь в рамках определения закона 5.3.

Условная вероятность, используемая в теореме 4.1 и определениях 4.1 и 5.2 как оценка закона, интересна не только тем, что это вероятность, а еще и тем, что она является **оценкой предсказательной силы закона**, являющейся наиболее важной характеристикой законов вообще. Понятие закона всегда прежде всего связывается с его способностью предсказывать, поэтому переход от характеристики закона в терминах истинности, принятой в философской логике и связанной с принципом фальсифицируемости, к характеристике закона в терминах предсказания является не просто уходом от старой парадигмы (включая принцип фальсифицируемости), а переходом к более естественному определению закона.

Теорема 4.1 в этом случае означает, что для детерминированного случая, который характеризует возможность предсказания в случае отсутствия шумов, определения закона через истинность и условную вероятность совпадают. Но если мы имеем стохастический случай, когда правила не истинны на M , определение закона через истинность теряет свой смысл, а определение закона, основанное на условных вероятностях и предсказании, сохраняет свой смысл.

Понятие гипотезы, используемое в философской логике и связанное с принципом фальсифицируемости, отличается от определения закона. В литературе нет определения закона природы. Следует подчеркнуть, что определение закона природы, и на это определение претендует наше определение, должно служить мостом между теоретическим, идеальным и эмпирическим уровнями рассмотрения. **Закон** даже эмпирический (в отличии от гипотез) **идеален**. Поэтому проверка и обнаружение закона никак не могут быть связаны с

принципом фальсифицируемости. В нашем определении обнаружение закона связано с его (вероятностной) неупрощаемостью, которая тесно связана с такими присущими законам свойствами, как простота, логическая сила, максимальная общность (или фальсифицируемость) и минимальность числа параметров.

Тестирование систем аксиом в условиях шумов

Процесс получения результатов эксперимента в соответствии с определением 5.1 можно разделить на два этапа - получение результатов эксперимента в "чистом" виде, как "фрагмента" некоторой эмпирической системы, а затем получение результатов реального эксперимента "добавлением" шумов. Выделить эти два этапа можно, введя две вероятностных меры для значений экспериментов - вероятностную меру в детерминированном и стохастическом случаях. Первая из них D_m будет удовлетворять дополнительному требованию 5.1.2 для вероятностей в детерминированном случае, а вторая S_m будет вероятностной мерой в общем случае, как определено в 5.1.

Введение двух вероятностных мер позволит нам получить вероятностную модель шумов. Вернемся к определению эксперимента в определении 5.1

$$\text{Exp}(s) = F \langle \langle a_1, \dots, a_m \rangle, I(M)I(X(\Sigma))s \rangle$$

Стохастический эксперимент $\text{Exp}(s)$ получается в два этапа: сначала - результат детерминированного эксперимента в соответствии с вероятностной мерой D_m , а затем применяется случайное преобразование F , отражающее влияние на результаты детерминированного эксперимента шумов, ошибок, неточности приборов и т.д. в соответствии с вероятностной мерой S_m . Приведем соответствующие дефиниции.

Определим переход от значений детерминированного эксперимента, представленного некоторыми наборами в двоичном кубе E , к значению стохастического эксперимента

как действие случайной функции $F: E \rightarrow E$. Отображение F есть некоторое случайное взаимнооднозначное отображение. Вероятностные характеристики этого отображения и, соответственно, модель шумов задаются соотношением двух вероятностей D_m и S_m . При этом вероятность S_m - есть вероятность реальных экспериментов, а D_m - вероятность гипотетического "идеального" эксперимента на эмпирической системе.

Вернемся к задаче тестирования систем аксиом. Теоремой 4.1 и следствием 4.1 для вероятностей D_m эта задача была решена и сведена к задаче 4. Можно ли доказать аналогичные теоремы в стохастическом случае для вероятностей S_m ? К сожалению, в общем случае это принципиально невозможно ввиду огромного разнообразия моделей шумов, ошибок испытуемых, моделей приборов и т.д. Тем не менее большой опыт решения практических задач, а также модельные эксперименты [5,10-13], показывают, что понятие вероятностного закона устойчиво относительно большого числа типов шумов. Устойчивость понятия вероятностной закономерности относительно некоторого типа шумов означает, что если некоторое множество правил $\{C_i\}$ является вероятностными законами в детерминированном случае, то то же самое множество правил является вероятностными законами и в стохастическом случае. Тем самым задача тестирования систем аксиом для данного типа шумов может быть сведена к задаче 4, за исключением проверки условия, что условные вероятности вероятностных законов равны 1. Последнее условие в стохастическом случае не может быть выполнено и должно быть заменено на величину, равную (1-(оценка уровня шумов)). Оценку уровня шумов можно получить в процессе эксперимента, например, время от времени случайно предъявляя совершенно одинаковые стимулы [13].

Эти рассуждения ставят следующую **проблему**: определить, какие вероятности и модели шумов сохраняют множество вероятностных законов.

Определение 6.1. Назовем **сохраняющими моделями шумов** те пары вероятностей S_m, D_m , которые сохраняют содержащиеся в них вероятностные законы (то есть множество вероятностных законов для вероятностей S_m и D_m одинаково).

Если мы ограничим себя рассмотрением только сохраняющих моделей шумов, то задача тестирования систем аксиом в стохастическом случае сводится к задаче:

Задача 5: Для сохраняющих моделей шумов, тестирование системы аксиом Σ осуществляется проверкой, для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub$, являющееся вероятностным законом на Exp .

Таким образом, для решения задачи тестирования системы аксиом в стохастическом случае необходимо знать (либо проверить машинным моделированием), является модель шумов сохраняющей или нет. Поэтому данная работа ставит проблему: определить множество сохраняющих моделей шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A.* Foundations of measurement. Vol. 1. N.-Y., London: Acad. press, 1971.
2. *Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A.* Foundations of measurement. Vol. 3. N.-Y., London: Acad. press, 1990.
3. *Витяев Е.Е.* Семантический подход к созданию баз знаний. Семантический вероятностный вывод наилучших для предсказания ПРОЛОГ - программ по вероятностной модели данных//Логика и семантическое программирование (Вычислительные системы, вып. 146), Новосибирск, 1992.

4. *Витяев Е.Е.* Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания//Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 67). Новосибирск, 1976. С. 54-68.
5. *Витяев Е.Е., Москвитин А.А.* Введение в теорию открытий. Программная система DISCOVERY//Логические методы в информатике (Вычислительные системы, вып. 148). Новосибирск, 1993. С. 117-163.
6. *Halpern J.Y.* An analysis of first-order logics of probability// Artificial Intelligence, 1990. V.46.
7. *Fenstad J.I.* Representation of probabilities defined on first order languages//J.N.Crossley, ed., Sets, Models and Recursion Theory: Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloquium, 1967. P. 156-172.
8. *Гухман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Киев:Вища школа, 1979. С. 408.
9. *Кендал М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М.:Наука, 1973. С. 899.
10. *Витяев Е.Е., Логвиненко А.Д.* Метод тестирования систем аксиом//Теория вычислений и языки спецификаций (Вычислительные системы, 152). Новосибирск, 1995. С. 119-139.
11. *Витяев Е.Е., Москвитин А.А.* ЛАДА - программная система логического анализа данных//Методы анализа данных (Вычислительные системы вып.111). Новосибирск, 1985. С. 38-58.
12. *Витяев Е.Е.* Логико-операциональный подход к анализу данных//Комплексный подход к анализу данных в социологии. М.:Институт Социологических исследований АН, 1989. С. 113-122.
13. *Logvinenko A.D., Byth W., Vityaev E.E.* We can order stimuli even when we are not able to see them: An evidence in favour of fuzzy sensory threshold, Perception and Psychophysics, 1997, (in press).