НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОГО МЕХАНИЗМА КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

П. С. Краснощеков

(Москва)

Предлагается статистическая модель механизма коллективного поведения, которая проверяется на ряде простых примеров. В рамках линейного подхода в модель вводится динамический компонент и исследуется ее решение.

Ключевые слова: коллективное поведение, статистическая модель, линейная модель, состояние индивида, априорная вероятность, финальная вероятность, переходный процесс.

Рассматривается ***простейшая математическая модель*** поведения коллектива. В ее основе лежит гипотеза о том, что индивидуум, принимая решение по тому или иному вопросу, руководствуется как своим личным отношением, так и отношением к этому вопросу окружающих его субъектов (коллектива). Например, индивидуум может решать: заниматься ли ему данным родом деятельности, вступать ли в данную общественную организацию, участвовать ли в данном мероприятии, голосовать ли за данное предложение и т. д. и т. п. Во всех этих случаях (отвлекаясь от их содержательной стороны) индивидууму предстоит решать в сущности одну проблему: перейти ему в некоторое данное состояние или нет. Чтобы построить математическую модель поведения такого индивидуума, необходимо ввести количественные оценки его отношения к данному состоянию. Таких оценок в простейшем случае можно предложить две: личное (априорное) отношение к j-му состоянию, которое определяется числом $0 \le a_j \le 1$, выражающим вероятность того, что индивидуум готов находиться в этом состоянии, и финальное (апостериорное) отношение (тоже, конечно, личное), сформированное после получения информации о поведении коллектива, которое определяется числом P_j, выражающим вероятность того, что индиивидуум пришел в данное состояние. Например, некто априори против рыночной экономики. Однако, видя реакцию окружающих людей, определенный процент которых за такую экономику, может пересмотреть свое личное (априорное) отношение к ней, поддаться влиянию положительно настроенных субъектов и окончательное (апостериорное) решение принять в пользу рынка. Может, конечно, не пересмотреть своих взглядов (если он независимая личность) и, следовательно, его апостериорное отношение к вопросу будет совпадать с априорным. Модель поведения должна учитывать весь "спектр" индивидов - от абсолютно зависимых до абсолютно независимых. Для этого необходимо ввести еще одну количественную характеристику индивидуума $0 \le \mu_j \le 1$, выражающую степень его независимости от состояния коллектива. Условимся считать, что $\mu_j=0$ означает абсолютную зависимость, а $\mu_j=1$ - абсолютную независимость.

Содержательная суть модели выражается в том, что каждый субъект, определив так или иначе долю членов коллектива, находящихся в данном состоянии, приходит сам в это состояние с вероятностью P_j, являющейся средневзвешенной величиной между априорной вероятностью и долей остальных членов коллектива, пришедших в данное состояние, с весовыми коэффициентами μ_j и $1-\mu_j$ соответственно. Формально это выглядит следующим образом

$$P_j = \mu_j a_j + (1-\mu_j)\, \Delta_j, \ j=1,2... N,$$

где Δ_j - доля членов коллектива, пришедших в данное состояние, а N - общее число членов коллектива.

Чтобы данная модель стала эамкнутой, т. е. чтобы из нее можно было определить финальные вероятности P_j каждого члена коллектива, необходимо долю Δ_j выразить через P_j. Это можно сделать естественно, заменив эту долю на ее математическое ожидание, т. е. на ее среднее ожидаемое значение

$$\Delta_I = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} P_1, \ j=1,2\ldots N.$$

Тогда наша модель окончательно примет вид

$$P_i = \mu_i a_i + \frac{1-\mu_i}{N-1}\sum_{i\neq j} P_i \text{ , j=1,2…N.} \quad (1)$$

Таким образом, для определения финальных вероятностей мы имеем систему N линейных уравнений с N неизвестными. Не представляется особого труда построить решение этой системы. Для этого обозначим M математическое ожидание числа субъектов, пришедших в данное состояние, т. е.

$$M = \sum_i P_i$$

и перепишем систему (1) следующим образом

$$P_i = \frac{N-1}{N-\mu_i}\mu_i a_i + \frac{1-\mu_i}{N-\mu_i}M \text{ , j=1,2…N.} \quad (2)$$

Если просуммировать левые и правые части этой системы по j от 1 до N, то получится уравнение для определения математического ожидания

$$M = (N-1)\sum_j \frac{\mu_i a_i}{N-\mu_i} + M\sum_j \frac{1-\mu_i}{N-\mu_i}.$$

откуда найдем, что

$$\frac{M}{N} = \sum_j \frac{\mu_i a_i}{N-\mu_i} \Bigg/ \sum_j \frac{1}{N-\mu_i} . \quad (3)$$

Теперь достаточно M из (3) подставить в (2), чтобы получить выражения для финальных вероятностей

$$P_i = \frac{N-1}{N-\mu_i}\mu_i a_i + N\frac{1-\mu_i}{N-\mu_i}\sum_j \frac{\mu_i a_i}{N-\mu_i} \Bigg/ \sum_j \frac{1}{N-\mu_i} . \quad (4)$$

Во многих случаях нас будет интересовать поведение больших коллективов, когда N достаточно велико, т. е. N⊇1. Тогда, пренебрегая величиной μ_j по сравнению с N, можно упростить формулы (3) и (4), приведя их к виду

$$\frac{M}{N} = \sum_j \mu_i a_i \Big/ \sum_j \mu_i \quad . \tag{5}$$

$$P_i = \mu_i a_i + (1-\mu_i)\sum_j \mu_i a_i \Big/ \sum_j \mu_i \text{ , j=1,2…N.} \tag{6}$$

Величина M/N представляет собой долю членов коллектива, пришедших в данное состояние. Анализом этой величины мы и займемся в дальнейшем.

Так как предложенная здесь модель поведения построена на основе примитивного здравого смысла, то оправданием ей может служить лишь проверка ее на простых и "прозрачных" примерах. Если окажется, что интерпретации, которые позволяет делать модель в рассматриваемых примерах, имеют содержательный смысл, то это, с нашей точки зрения, будет оправданием того примитивизма, на основе которого она построена, и возможно, придаст ей определенную эвристическую ценность.

Проанализируем ***ряд примеров***, расположенных по мере нарастания их сложности.

1. ***Все субъекты абсолютно зависимы*** (μ_j=0, j=1,2... N). Чтобы правильно воспользоваться формулой (3), ее нужно переписать в виде

$$\frac{M}{N}\sum \frac{\mu_i}{N-\mu_i a_i} = \frac{\mu_i a_i}{N-\mu_i}.$$

откуда следует, что M/N*0=0, т. е. M/N может принимать любое значение от 0 до 1. То же самое относится и ко всем P_j. Такой коллектив абсолютно неориентирован, и его состояние неопределенно. Это напоминает толпу или стадо, в котором нет вожака. Поведение такого коллектива непредсказуемо, как и поведение толпы. Но в неориентированном стаде может появиться вожак.

2. ***Лидер в абсолютно зависимом коллективе*** (все μ_j=0, кроме одного, например $\mu_1 \neq 0$). В этом случае M/N=a_1, и все P_j=a_1, т. е. все субъекты "копируют" поведение лидера. Если лидер четко сориентирован по отношению к данному состоянию, т. е. a_1=0 или a_1=1, то и поведение коллектива однозначно: либо все находятся в данном состоянии (a_1=1), либо - нет (a_1=0). Таким образом, толпа абсолютно управляема: любой лидер может привести ее в любое нужное ему состояние. Если ситуация экстремальная, а лидер психически неуравновешен, то он может толкнуть толпу на любые безрассудства, что неоднократно и наблюдалось на уличных сборищах и митингах. Эта внушаемость толпы используется лидерами различных партий. Поэтому интересно исследовать митинговую ситуацию, когда в толпе может быть несколько лидеров различной ориентации.

3. ***Несколько лидеров в абсолютно зависимом коллективе*** (все μ_j=0, кроме первых $n \subseteq N$, т. е. $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0 \ldots$ $\mu_n \neq 0$). Так как N велико по сравнению с n, то воспользуемся (5)

$$\frac{M}{N} = \sum_{j=1}^{n} \mu_i a_i \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} \mu_i \; .$$

Здесь интересны два случая, когда в коллективе всего два лидера, придерживающихся противоположных взглядов (a_1=1, a_2=0), и когда есть третий лидер - центрист, занимающий среднюю позицию ($0 < a_3 < 1$). В первом случае M/N=$\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$, т. е. за первым лидером идет доля субъектов, равная $\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$, а за вторым - соответственно $\mu_2/(\mu_1+\mu_2)$. Отсюда видно, что за более независимым лидером (например $\mu_1 > \mu_2$) идет и большая часть субъектов. Выигрывает более уверенный лидер. Если оба лидера одинаково незави -

симы, т. е. $\mu_1=\mu_2$, то субъекты делятся пополам: M/N=1/2. В случае, если есть третий лидер ($\mu_3 \neq 0$, $0 < a_3 < 1$), то за первым лидером пойдет доля субъектов, равная $(\mu_1+\mu_3 a_3) / (\mu_1+\mu_2+\mu_3)$, а за вторым - $[\mu_2+\mu_3(1-a_3)] / (\mu_1+\mu_2+\mu_3)$. Напомним, что здесь речь идет о двух взаимоисключающих альтернативах (находиться в данном состоянии или нет), которые отражены в позициях первых двух лидеров.

Нетрудно видеть, что в случае $a_3 > 1/2$ третий лидер "работает" на первого, а в случае $a_3 < 1/2$ - на второго. Если он абсолютный центрист ($a_3=1/2$), то он выравнивает ситуацию, т. е. "работает" на более слабого лидера, у которого μ меньше. Если же первый и второй лидеры одинаково независимы ($\mu_1=\mu_2$), то центрист никак не влияет на ситуацию. так как в этом случае M/N=1/2 независимо от величины μ_3. Таким образом, абсолютно центристская позиция в абсолютно зависимом коллективе абсолютно неэффективна - толпа такого лидера не слушает, она ориентируется на четкие позиции.

4. ***Лидер (начальник) в однородном коллективе*** (случай, когда в однородном коллективе, не обязательно абсолютно зависимом, имеется независимый, четко ориентированный на ситуацию лидер (начальник)). Формально

$\mu_1=1$, $a_1=1$ - начальник;

$\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_n=\mu$, $a_2=a_3=\ldots=a_n=a$ - коллектив.

Подставляя эти данные в (3), получаем

$$\frac{M}{N}=\frac{N-\mu+a\mu(N-1)^2}{N-\mu+\mu(N-1)}.$$

Если в (7) устремить $N\to\infty$, то получим

$$\lim_{N\to\infty}(M/N)=a.$$

т. е. при больших N и $\mu \neq 0$ коллектив неуправляем, т. к. взаимное влияние членов коллектива друг на друга превышает влияние лидера на коллектив (подчеркнем, что это в том случае, если коллектив не является абсолютно зависимым, т. е. $\mu \neq 0$).

Когда же коллектив абсолютно управляем, т. е. в каких случаях он целиком следует за начальником ($M/N=1$)? Нетрудно видеть, что это достигается в двух случаях: либо $\mu=0$, т. е. субъект коллектива - человек "стадный"; либо $a=1$, т. е. субъект коллектива - человек "разумный" (предполагается, что позиция начальника разумна) и такой коллектив можно называть обществом единомышленников. Так как в реальном рабочем коллективе крайние ситуации встречаются редко, то и в общем случае ($\mu \neq 0$, $a \neq 1$) возникает задача о рациональном количественном составе рабочего коллектива.

5. *Рациональный количественный состав рабочего коллектива*. Пусть состав коллектива считается рациональным, если $M/N \geq Q$, где Q - некоторое заданное число. Из (7) получаем неравенство

$$(Q-a)\,\mu\,(N-1)^2 - (1-Q)\,(N-1) - (1-Q)\,(1-\mu) \leq 0. \qquad (8)$$

Будем считать, что в стандартном коллективе $\mu=1/2$, т. е. субъект в меру независим, и $a=1/2$, т. е. субъект нейтрален к позиции начальника. Неравенство (8) примет вид

$$(2Q-1)\,(N-1)^2 - 4\,(1-Q)\,(N-1) - 2\,(1-Q) \leq 0. \qquad (9)$$

Относительно (N-1) (9) представляет собой квадратичное неравенство, которое решается "школьными" методами. При $Q=3/4$ получаем $1 \leq N \leq 3$ - рабочая группа, при $Q=2/3$ имеем $1 \leq N \leq 6$ - лаборатория, бригада и т. п. С уменьшением Q, т. е. с падением эффективности коллектива, допустимый состав коллектива растет и при $Q=1/2$ может быть как угодно большим ($1 \leq N \leq \infty$), т. е. в большом стандартном коллективе при одном начальнике половина всегда будет бездельничать. Отсюда следует, что большие коллективы необходимо структурировать, т. е. вводить подразделения, оргструктуру, иерархию подчинения, что и наблюдается в жизни.

В заключение этого пункта вернемся к формуле (3). Как уже было показано, если в обществе есть лидер, то общество идет за ним лишь в двух крайних случаях: либо когда ментальность общества "стадная" (μ_j=0), либо когда общество разумно консолидируется с лидером (a_j=a_1=1), т. е. все общество есть общество единомышленников. В общем же случае, как это следует из (3), когда набор μ_j и a_j произволен (такое общество естественно назвать плюралистическим), достигнуть эффективности M/N=1 не удается. Так как надеяться, что все общество будет обществом разумных единомышленников, не приходится, естественно, у лидера возникает соблазн использовать стадную ментальность общества, а независимых и инакомыслящих тем или иным образом изолировать от участия в общественной жизни. При этом совершенно неважно, стремится ли лидер, например, к построению коммунистического распределительного рая или демократической рыночной идиллии. Стадная ментальность общества - благоприятная почва для прорастания тоталитаризма независимо от декларируемых лидером целей.

6. *Парламент*. До сих пор мы проверяли построенную модель на качественное соответствие действительности. В этом пункте мы попытаемся на материалах III съезда народных депутатов СССР проверить ее на количественное соответствие, т. е. вычислить на основе модели некоторые количественные характеристики и сравнить их с реальными данными. Естественно, может возникнуть вопрос: почему выбран именно этот съезд? Дело в том, что по нему были достаточно подробные материалы, которыми располагал автор, а также в том, что структура депутатского корпуса тех времен была проста и "прозрачна". Легко просматривалась партия будущего президента, оппозиция и так называемое "болото". К тому же можно считать, что этот съезд уже в историческом прошлом и обращение к его материалам ничьих интересов не затрагивает.

Итак, имеется парламент, который состоит из N членов, среди которых q членов партии президента, P членов оппозиции, а остальные
r=N-q-P - "болото". Естественно считать, что у президента и его партии имеется твердая независимая позиция по каждому обсуждаемому вопросу и при голосовании они действуют как

единое целое, т. е. a_j=1 (в тех случаях, когда они голосуют против, естественно, a_j =0, но очевидно, что вопрос можно переформулировать на противоположный, и тогда a_j =1). Оппозицию также будем считать единой в решениях, т. е. группой независимых единомышленников, у которой, в отличие от партии президента, a_j =0. "Болото" будем считать однородным: все $\mu_j=\mu$, $a_j=a$. Голосованию "за" соответствует a_j=1, голосованию "против" - a_j=0. Воздержавшиеся в рамках этой модели ничем не отличаются от не участвовавших в голосовании, и мы их будем отбрасывать.

Воспользуемся формулой (5). Из нее следует, что "за" проголосует доля депутатов

$$\frac{M}{N} = (q + \mu ar)/(P + q + \mu r). \qquad (10)$$

Если "болото" абсолютно зависимо, то μ=0 и (10) примет вид

$$\frac{M}{N} = q/(P + q) = C.$$

Последняя величина имеет определенный внутренний смысл для данной модели. Анализируя (10), нетрудно усмотреть, что в случае $a<C$ президенту выгодно, чтобы представители "болота" были наиболее зависимы (чем меньше μ, тем лучше), т. е. президент заинтересован в существовании "болота" (у идеального "болота" μ=0). Если же $a>C$, то президенту выгодно, чтобы μ было больше, т. е. он не заинтересован в существовании "болота".

Обработка данных III съезда показывает, что на нем партия президента составляла примерно (q=) 1000 человек, оппозиция около (P=) 250 человек, остальные r представляли "болото". Здесь следует дать некоторое разъяснение. Так как на каждом голосовании присутствовали и голосовали отнюдь не все депутаты, то с вычислением r есть определенные трудности. Чтобы их обойти, придется принять гипотезу, что все представители партии президента и оппозиции как наиболее заинтересованные практически полностью участвовали в голосовании. Тогда количество представителей "болота" от голосования к голосованию будет меняться и поэтому будет вычисляться отдельно по данным съезда в каждом голосовании. Выручает также и тот факт, что в случае идеального "болота", у которого $\mu=0$, как видно из (11), от величины "болота" результат не зависит. Идеальное "болото" при голосовании делится в пропорции $C=q/(P+q)$.

Обрабатывая результаты съезда, мы выделили только те вопросы, по которым у оппозиции с партией президента были принципиальные разногласия. Таких вопросов оказалось совсем немного, и результаты голосования по ним сведены в табл. 1 (предварительно вопросы переформулированы так, чтобы партия президента голосовала "за", а оппозиция - "против").

Таблица 1

Результаты голосования на III съезде народных депутатов СССР по 9 принципиальным вопросам

"за"	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428
"против"	374	349	352	368	452	399	409	463	485
воздержавшиеся	47	112	52	76	66	73	163	41	74
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987
всего без воздержавшихся	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913
% голосов "за"	80	81	81	81	77	79	77	76	75

Примем простейшую гипотезу, что на этом съезде было идеальное "болото", т. е. μ=0. Тогда для подсчета процента голосов "за" можно воспользоваться формулой (11). Получаем

$$\frac{M}{N}*100\% = \frac{1000}{1000+250}*100\% = 80\%. \qquad (12)$$

Из (12) видно, что мы получили результат, близкий к наблюдаемому. В среднем относительная ошибка составляет около 1%, но, как видно из табл. 1, по отдельным голосованиям она колеблется и достигает максимума порядка 6-7%.

Возникает вопрос: возможно ли так естественно поправить модель, чтобы добиться хорошего совпадения по каждому голосованию? Для этого, нам кажется, необходимо ввести в модель влияние поведения президента на депутатов при обсуждении вопросов, подлежащих голосованию. Фактически это влияние, как будет видно в дальнейшем, распространяется лишь на представителей "болота", т. к. оппозиция и партия президента состоят из абсолютно независимых членов.

7. *Рейтинг президента в парламенте*. В исходной модели было одно весьма сильное упрощение. В ней не персонифицировалось взаимное влияние субъектов друг на друга. Оставаясь в рамках линейности, можно обобщить модель, введя матрицу взаимных влияний субъектов

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}\,\lambda_{12}\,\lambda_{13}\,...\,\lambda_{1N} \\ \lambda_{21}\,\lambda_{22}\,\lambda_{23}...\,\lambda_{2N} \\ .... \\ \lambda_{N1}\,\lambda_{N2}\,\lambda_{N3}...\,\lambda_{NN} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

где из условия нормировки $\Sigma\, \lambda_{ij} = N$, а все λ_{jj}=1. Уравнения для определения финальных вероятностей P_j примут вид

$$P_j = \mu_j a_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j}\lambda_{ji}P_i \text{ , j=1,2…N.} \tag{14}$$

Точную матрицу взаимных влияний нам, к сожалению, знать не дано. Поэтому придется делать упрощающие предположения. Будем считать, что влияние президента на депутатов одинаково для всех депутатов и равно $\lambda_{j1}=\lambda_0$ ($j\neq1$), а влияние депутатов друг на друга также одинаково и равно $\lambda_{j1}=\lambda$ ($j\neq1$, $j\neq i$). Влияние депутатов на президента несущественно, т. к. президент абсолютно независим ($\mu_1=1$), т. е. $P_1=a_1=P_0$. Назовем λ_0 рейтингом президента, а λ - рейтингом рядового депутата. Эти рейтинги связаны условием нормировки

$$\lambda_0 + \lambda\,(N-2) = N-1. \tag{15}$$

Матрица взаимных влияний принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 \;\; \lambda_{12}\, \lambda_{13} \ldots \lambda_{1N} \\ \lambda_0 \;\; 1 \;\; \lambda \ldots \lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{N0}\, \lambda \;\; \lambda \ldots 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Используя матрицу (16) и соотношение (15), перепишем (14) следующим образом

$$P_j = \mu_j a_j + \lambda\frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j} P_i + (1-\mu_j)(1-\lambda\frac{N-2}{N-1})P_0\text{. j=2,3…N.} \tag{17}$$

Вводя, как и в предыдущих случаях, долю субъектов (M/N), пришедших в данное состояние, получим для нее (при больших N) следующую формулу

$$\frac{M}{N} = \frac{\sum_j \mu_j a_j + (1-\lambda)P_0\sum_j(1-\mu_j)}{N-\lambda\sum_j(1-\mu_j)}.$$

Эта формула, как легко видеть, переходит в (5) при λ=1. Конкретно, для нашего случая

$$\frac{M}{N}=\frac{q+(1-\lambda)P_0 r}{P+q+(1-\lambda)r}. \qquad (18)$$

Как видно из (18), теперь результат голосования зависит от количественного состава "болота". И это естественно, так как влиянию подвержены лишь эти депутаты в силу своей повышенной зависимости.

Изложим дальнейшие соображения. Тот, кто смотрел съезд по телевизору или читал его материалы, возможно, заметил, а кто не заметил, должен поверить на слово, что поведение президента, когда он вел съезд, было отнюдь не всегда беспристрастным. В некоторых случаях он проявлял явную заинтересованность в положительных результатах голосования, в некоторых казался безразличным, а иногда даже казалось, что он может проголосовать против. Наблюдая за поведением президента, представители "болота" в силу своей повышенной зависимости делают выводы и вносят коррективы в голосование. Нам кажется, что с точки зрения представителей "болота" результаты табл. 1 можно сгруппировать по следующему принципу: в первую группу отнести все результаты голосований, когда представителю "болота" казалось, что президент проголосует "за" (P_0=1); во вторую группу - результаты, когда возникало ощущение, что президент колеблется (P_0=1/2); в третью - когда можно было подумать, что президент проголосует "против" (P_0=0). При такой перегруппировке получается табл. 2.

Таблица 2

Перегруппировка табл. 1
с точки зрения представителей "болота"

	$P_0=1$				$P_0=1/2$			$P_0=0$		Ср.
"за"	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428	1490
"против"	374	349	352	368	452	399	409	463	485	406
воздержавшиеся	47	112	52	76	66	73	163	41	74	78
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987	1974
всего без воздержавшихся	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913	1896
r	662	603	648	660	687	656	557	677	663	646
% голосов "за"	80	81	81	81	77	79	77	76	75	79

Подставляя данные табл. 2 в (18), получим серию уравнений для определения λ при каждом голосовании. Решение этих уравнений дает следующий ряд значений величины λ: 1,00; 0,89; 0,89; 0,90; 0,80; 0,93; 0,75; 0,90; 0,87. Разброс значений λ неудивителен, так как в этом проявляется неустойчивость обратной задачи, из которой определяется λ. Для расчетов естественно пользоваться средним значением $\lambda = 0{,}88$. При этом мы будем использовать также среднее значение r = 646. Таким образом получаем

$$\frac{M}{N} = \frac{1000 + 0{,}12 * P_0 * 646}{1250 + 0{,}12 * 646} = \frac{1000 + 77P_0}{1327}.$$

Используя эту формулу, имеем

при P_0= 1 M/N = 1077/1327 ≈ 0,81;

при P_0=1/2 M/N = 1039/1327 ≈ 0,78;

при P_0= 0 M/N = 1000/1327 ≈ 0,75.

Это дает совпадение с данными съезда по группам с точностью выше 1%, что можно считать идеальным.

Итак, рейтинг рядового депутата λ=0,88. Подсчитаем рейтинг президента

$$\lambda_0 = 1895 - 0{,}88*1894 = 226,$$

т. е. рейтинг президента на III съезде был очень высок. Он превосходил рейтинг рядового депутата в 257 (226: 0,88) раз.

В заключение нами будет кратко исследована ***динамика переходного процесса***. Нетрудно видеть, что построенная выше модель является статистической. Все процессы в ней протекают мгновенно, никак не моделируется процесс перехода субъекта из априорного состояния в финальное. В рамках линейного подхода модель этого процесса можно построить из следующих простейших соображений. Будем считать, что малое приращение dP_j текущей вероятности перехода субъекта в данное состояние за малое время dt пропорционально этому времени с точностью до 0 (dt) и рассогласованию между средневзвешенным значением вероятности и текущим, т. е.

$$dP_j = k_j\left(\mu_j a_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j} P_i - P_j\right)dt, \text{ j=1,2…N.}$$

откуда получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения P_j (t)

$$\frac{dP_j}{dt} = k_j\left(\mu_j a_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j} P_i - P_j\right)dt, \text{ j=1,2…N.} \qquad (19)$$

Здесь k_j - индивидуальная характеристика субъекта, определяющая быстроту его реакции на изменение ситуации.

Сделаем замену искомых функций, положим

$$P_j = x_j + P_j\infty, \ j=1,2... N. \qquad (20)$$

где $P_j\infty$ = const, удовлетворяющая уравнениям статистической модели, а именно

$$P_j\infty = \mu_j a_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j} P_i\infty, \ \text{j=1,2... N.}$$

Тогда для функций x_j (t), характеризующих переходный процесс, получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_j}{dt} = k_j\left(\mu_j a_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i\neq j} X_i - X_j\right), \ \text{j=1,2... N.} \qquad (21)$$

Характеристический определитель этой системы

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} -(k_1+\nu) \ \ \varphi_1 \ \ \varphi_1 ... \varphi_1 \\ \varphi_2 \ \ -(k_2+\nu) \ \ \varphi_2 ... \varphi_2 \\ \varphi_N \varphi_N \varphi_N ... \ -(k_N+\nu) \end{vmatrix}, \text{ где } \varphi_j = k_j \frac{1-\mu_j}{N-1}.$$

Исследуем характеристические числа, удовлетворяющие уравнению Δ (ν) =0. Как известно, эти числа определяют скорость переходного процесса. Определить характеристические числа удается во всех исследованных выше примерах, чего ради краткости изложения мы здесь делать не будем, а лишь заметим, что во всех примерах, кроме первого (все субъекты абсолютно зависимы), они отрицательны, т. е. переходный процесс сходится к финальному состоянию, определяемому из статистической модели. Нас будут интересовать всего ***два примера*** из рассмотренных ранее.

1. ***Все субъекты абсолютно зависимы.*** В этом случае μ_j=0, и естественно положить все k_j=k. Характеристические числа имеют вид

$$\nu_1 = 0;\ \nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_n = -k\frac{N}{N-1}.$$

Отсюда видно, что переходный процесс определяется числом ν_1=0, а именно: процесс никуда не сходится, система остается в неопределенном состоянии, что вполне согласуется с выводами статистической модели.

2. ***Парламент*** (на примере III съезда народных депутатов СССР). Структура характеристических чисел здесь сложнее:

- первые q корней характеристического уравнения $\nu_j = -k_1$;
- следующие P корней $\nu_i = -k_2$;
- один особый корень $\nu^* = -k[1-(1-\mu)\frac{r-1}{N-1}]$;
- остальные r-1 корней равны $\nu_e = -k\frac{N-\mu}{N-1}$.

Здесь считается, что у партии президента все $k_j = k_1$, у оппозиции все $k_i = k_2$, а у "болота" все k_e=k. При больших значениях q, P и r по сравнению с 1 все выражения упрощаются, т. е.

$$\nu_j = -k_1;\ \nu_i = -k_2;\ \nu^* = -k\,[1-(1-\mu)\,r/N];\ \nu_e = -k.$$

Так как естественно предположить, что представители "болота" большие "тяжелодумы", чем представители партии президента и оппозиции, то величина k меньше k_1 и k_2, откуда следует, что скорость переходного процесса определяется "болотом", т. е. характеристическим числом ν^*. Чем больше "болото", тем медленнее сходится процесс.

Вычислим текущие вероятности представителей "болота". Так как все они одинаковы в этой модели, то легко найти, что

$$P_e(t) = (a - P_e\infty) \exp \nu^* t + P_e\infty, \qquad (22)$$

где, как мы помним, финальная вероятность представителей "болота" определяется из формулы (6), а именно

$$P_e\infty = \frac{\mu a N + (1-\mu) q}{N - (1-\mu) r}. \qquad (23)$$

Определим условия, при которых $P_e(t) < P_e\infty$ для любого t. Из (22) видно, что это равносильно неравенству $P_e\infty > a$. Используя (23), получим

$$\mu a N + (1-\mu) q > aN - a(1-\mu) r,$$

что равносильно

$$q > a(N-r).$$

Отсюда следует, что

$$a < \frac{q}{N-r} = \frac{q}{P+q} = C.$$

Соответственно, при $a \geq C$ будет $P_e(t) \geq P_e\infty$ при всех t. Таким образом, если $a<C$, то $P_e(t) < P_e\infty$, и президенту выгодно тянуть время с постановкой вопроса на голосование, необходимо ждать, чтобы "болото" дозрело до финального состояния. Если же $a \geq C$, то $P_e(t) \geq P_e\infty$, и вопрос на голосование нужно ставить как можно скорее. Так как похоже, что на III съезде значение a у "болота" было близко к 1/2, а величина C=4/5, т. е. $a < C$, то с постановкой вопроса на голосование можно было не торопиться, можно было дать выступающим наговориться, что, как нам кажется, прекрасно осознавал председательствующий - будущий президент.

И еще несколько слов. Автор не является специалистом в области социологии и не обольщается построенной моделью. Более того, он убежден, что реальность значительно сложнее и, по-видимому, не обойтись без нелинейных зависимостей. Однако, как это видно из данной работы, существуют типы поведения, которые достаточно адекватно описываются линейными моделями, и это любопытно.