# Модель динамики групповых структур человеческих сообществ

**В.Б.Ковчегов**
*(Москва)*

Дан обзор содержательных теорий когнитивистского направления, а также базирующихся на них статистических и динамических моделей групповых структур. Построена модель человеческого сообщества, объясняющая возникновение сбалансированных структур, реализованная системой локально взаимодействующих автоматов, связанных системой отношений и наделенных возможностью реагировать.

Ключевые слова: групповые структуры, малые группы, сети вероятностных автоматов, локальное взаимодействие, марковские цепи, теория когнитивного диссонанса, теория структурного баланса.

Теория групповых структур малых человеческих сообществ является наиболее формализованной областью социальной психологии. Существует довольно большое количество статей, книг, учебников, в которых подробно излагаются основные достижения этой теории [1-5]. В ее рамках создана целая серия статистических моделей (балансовая, кластерная, транзитивности и т.п.), которые проверялись на обширном статистическом материале, уточнялись, совершенствовались. В первом разделе настоящей статьи кратко описаны содержательные допущения, лежащие в основе математической теории баланса Ф.Хайдера — представителя так называемого когнитивистского направления в психологии, а также модель ранжированных кластеров Д.Дэвиса и С.Лейнхардт, которая базируется на теории группового взаимодействия Д.Хоманса. Заметим, что теории в социальных науках нередко выдвигаются до получения серьезной эмпирической информации, а только затем создаются и проверяются опирающиеся на них статистические модели.

После разработки и апробации статических эмпирических моделей групповых структур возникла задача построения их динамических вариантов, в которых постулируемые теорией и частично эмпирически проверенные структуры являлись бы результатом динамического развития. Исторически первой попыткой такого построения стала стохастическая модель, разработанная А.Соренсеном и М.Халлинан [6], в которой поставленная выше задача решена не была. Следующая — детерминистическая — была разработана Д.Хантером [7]. Эта модель, изложенная во втором разделе, обладает многими хорошими объясняющими свойствами и претендует на объяснение появления практически всех типов групповых структур в качестве «инвариантных социограмм», т.е. социограмм, к которым стремится динамический процесс, полученный в результате формализации четырех постулируемых автором социально-психологических механизмов. Но, с другой стороны, оказалось, что не всякая «инвариантная сопрограмма» принадлежит к одному из типов, изучаемых в теории групповых структур.

Автоматные модели, разработанные автором статьи [8,9] (третий раздел), частично опирающиеся на теорию структурного баланса Хайдера-Картрайта-Харари и теорию когнитивного диссонанса Л.Фестингера, позволяют выделить сбалансированные по Хайдеру-Картрайту-Харари или по Д.Дэвису структуры, как единственно возможные, для которых матрица переходных вероятностей цепи Маркова, построенной по графу отношений, описывающих структуру, имеет предел. При развитии теории это условие заменено на условия существования у построенной по графу отношений марковской цепи максимального числа инвариантных мер. Максимум берется по всем системам отно-





шений, допустимых па данном графе. В качестве графа отношений может быть взят произвольный ориентированный граф без петель, обладающий свойством «взаимности».

Разработанная модель малой группы опирается на предложенный автором вариант формализации теории когнитивного диссонанса Л.Фестингера. Дано формальное определение бездиссонансных структур и показано, как взаимодействуют между собой теории Л.Фестингера и Ф.Хайдера в рамках автоматной модели. В приложении доказываются все утверждения, сформулированные в основном тексте.

## 1. Балансовые теории и некоторые алгоритмы

Основной методологический принцип, который, по нашему мнению, должен соблюдаться в математическом моделировании социальных процессов, состоит в максимально полном использовании существующих в психологии, социальной психологии и социологии содержательных теорий и, в первую очередь, гипотез о социально-психологических механизмах, определяющих поведение человека.

Модели, изложенные в этой статье, опираются на несколько теорий такого рода. В качестве их основы выступает представление о человеке как существе, обладающем способностью к восприятию и переработке информации, т.е. «человеке когнитивном». Центральной идеей когнитивных теорий является предположение о том, что человек всегда стремится к психическому равновесию, т.е. стремится к достижению внутренней связности, логичности, непротиворечивости своей картины мира. Когнитивные элементы (когниции, знания) не всегда в эту картину вписываются, что вызывает определенные типы противоречий между ними (диссонанс) и определенную напряженность, требующую разрешения. Разрешение возникшего противоречия побуждает к некоторым действиям (поведению). Упомянутая здесь теория когнитивного диссонанса Л.Фестиигера (1957 г.), позволяющая формализовать процесс мотивации, легла в основу автоматной модели человеческого сообщества, представленной в третьем разделе. Другая когнитивистская теория, породившая целый спектр моделей баланса, — теория структурного баланса Ф.Хайдера (К), 11|. В ней постулируется существование психических сил в когнитивном поле человека, которые направлены на сохранение баланса. Баланс, по Хайдеру, — это не реальное соотношение сил между элементами, а только восприятие их икдипидом. Если один человек считает, что другой относится к нему хорошо, то любой его негативный акт «выпадет» из общей картины, и в действие вступают психические силы, стремящиеся восстановить равновесие.

Идеи Ф.Хайдера были развиты Л.Джоупсом, Д.Дэвисом и Г.Кэлли. Д.Картрайт и Ф.Харари [12] формализовали теорию баланса и расширили ее, что позволило перенести идеи структурного баланса на группы произвольного размера.

С поведенческой точки зрения важнейшим следствием из теории Ф.Хайдера и его последователей является предположение о том, что: 1) позитивное отношение транзитивно («люблю того, кого любит друг»); 2) негативное отношение интразитивно (не выполняется принцип «ненавижу того, кого ненавидит мой враг»). Как правило,рассматриваются отношения оценки (люблю, не люблю) и принадлежности (похожий, не похожий).

Сформулированные в таком виде выводы из теории баланса легко формализуются, особенно для групп с симметричными отношениями, т.е. тех, в которых не может быть отношений разных знаков для любых двух индивидов. Так как в социальной психологии обычно рассматривают контактные группы (в которых каждый знаком с каждым), то для них граф отношений — полный. Симметричные отношения описываются симметричными графами. Граф отношений считается *сбалансированным по Хапдеру-Картрапту-Харари (ХКХ — сбалансированным),* если все замкнутые маршруты из двух и более ребер положительны, т.е. все маршруты имеют четное число отрицательных отношений. Для полного симметричного сбалансированного графа верна *структурная теорема:* группа, имеющая сбалансированный полный граф отношений, всегда разбивается на две антагонистические подгруппы (одна из них может быть пустой). Члены каждой связаны между собой только позитивными отношениями, а сами подгруппы — только отрицательными. На практике не всегда наблюдается такое разбиение. Это привело к формулировке других эмпирических моделей. Д.Дэвис [13] предложил следующую модель кластерности: граф является *кластерным (Д-сбалансированным),* если всякий его замкнутый! маршрут не содержит одного отрицательного ребра. Для полных симметричных графов отношение это означает, что группа разбивается на любое число антагонистических подгрупп (кла-|





стеров), а не только на две. Здесь также члены одной подгруппы связаны положительными отношениями.

В модели ранжированных кластеров (Д.Дэвис, С.Лейнхардт [14]) предполагается наличие иерархии подгрупп, каждый уровень которой содержит не менее одной подгруппы. В этой статистической модели отношения могут быть только положительными и нейтральными. Между подгруппами существуют асимметричные отношения, имеющие направление от индивидов из подгрупп менее высокого уровня к индивидам подгрупп более высокого уровня. Иерархичность получается из-за того, что члены групп с низким статусом предпочитают членов с высоким статусом, которые не отвечают им взаимностью.

Заметим, что все определения даны в двухбалльной системе отношений: положительные и отрицательные, положительные и нейтральные. Иногда применяется трехбалльная шкала отношений: положительные, нейтральные и отрицательные. Эта шкала очень часто приводит к двусмысленным, неоднозначным формулировкам и результатам и здесь будет применяться крайне редко. Положительные и отрицательные отношения будут рассматриваться либо как непрерывные величины, характеризующие интенсивность отношений, как в модели Д.Хантера, либо как дискретные величины в автоматных моделях. Также необходимо отметить определенную нечеткость при определении статистических моделей (балансовой, кластерной и ранжированных кластеров, транзитивной и т.п.) в случае асимметричных отношений. Для этого фигурирующие в определениях маршруты необходимо считать ориентированными. Структурные теоремы для асимметричных отношений не верны. В общем случае такие теоремы не верны и для симметричных отношений, если граф отношений не является полным.

*Социоматрицей* называется матрица $X = (x_{ij})$, где $x_{ij}$ — действительное число, выражающее величину интенсивности отношений 1-го индивида к j-ому. Предполагается, что: $x_{ij}>O$, если отношение положительное, $x_{ij} <0$ — отрицательное, $x_{ij} =0$ - нейтральное; $l<i, j<n$, где n — число индивидов в группе; граф отношений — полный. Отношение к самому себе либо не определяется, либо считается положительным. Будем называть отношения *симметричными,* если $\forall i, j x_{ii} = x_{ii}$ . Симметричным отношения соответствует симметричная социоматрица, т.е. такая матрица, что $X^T = X$, где $^т$ — знак транспонирования.

Заметим, что для любого вектора $\bar{x}$ = ($x_1$,...,$x_n$), где $x_i$ — не равное нулю действительное число, симметричная матрица $\bar{x}^T\bar{x}$ = ($x_ix_i$, $1\leq i,j\leq n$) задает *балансовую структуру,* другими словами определяет разбиение множества индексов I = {1,2,...,n} на два подмножества $I_1$ = {i:$x_i$>0} и $I_2$={i:$X_i$<0}, I = $I_1$U$I_2$, $I_1\cap I_2=\varnothing$ таких, что отношения элементов внутри каждого положительные, а между элементами подмножеств — отрицательные.

Поставим следующий вопрос: можно ли найти k векторов $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_k$ таких, что симметрическая матрица $\bar{x}^T{}_1\bar{x}_1+...+\bar{x}_k{}^T\bar{x}_k$ задавала бы на I разбиение на s подгрупп, имеющих внутри себя только положительные отношения, а между собой — только отрицательные?

Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

**Лемма.** А. *Для любых векторов* $\bar{x}_1,...,\bar{x}_{k-1}(1\leq k\leq n)$, *координаты которых не имеют нулевых элементов, матрица* $\bar{x}^T{}_1\bar{x}_1+...+\bar{x}_{k-1}{}^T\bar{x}_{k-1}$ *может задавать разбиение не более чем на k антагонистических подгрупп.*

*В. Для получения социоматрицы, задающей разбиение на k антагонистических подгрупп (k≤n) группы из n элементов, всегда можно найти (k—1) вектор без нулевых координат, что* $\bar{x}^T{}_1\bar{x}_1+...+\bar{x}_{k-1}{}^T\bar{x}_{k-1}$ *будет искомая социоматрица..*

Укажем, что фигурирующая в лемме система векторов может быть выбрана ортогональной.

Доказательство леммы (которое здесь приведено не будет) опирается на тот факт, что в n-мерном пространстве нельзя найти более (п + 1)-го вектора, каждый из которых имеет тупые углы со всеми остальными.

Эта лемма позволяет строить итерационные алгоритмы на множестве социоматриц, отвечающих состоянию сбалансированности по Хайдеру-Картрайту-Харари или по Дэвису. Пусть, например, в некие случайные моменты времени происходят «события», которые получают оценку $x_i\neq 0$ $\forall i\in I=(1,2,...,n)$ причем $x_i$>0, когда отношение к «событию» позитивное $x_i$<0 - негативное. После обмена оценками осуществляется корректировка отношений по следующему алгоритму: $x_{ii}(t+\Delta t)=\lambda_{ii}(t)x_{ii}(t)+x_ix_i$ где $x_{ij}$(t) — отношение до «событыя», $x_{ii}(t+\Delta t)$Xj.(t + At) — отношение после; «событие», его оценка и обмен оценками происходят в течение периода (t, t + $\Delta$t) ($\Delta$t = 1 в случае, если процесс считается дискретным); $\lambda_{ii}(t)=\lambda_i(t)*\lambda_i(t)$; $\lambda_i(t)$ и $\lambda_i(t)$ — коэффициенты «забывания» индивидов i и j. Если на каждом шаге выбирать коэффициенты небольшими (чтобы $\lambda_i\lambda_i|x_{ii}(t)|\langle|x_ix_i|$), то независимо от начального значения процесс всегда будет находиться в классе матриц, сбалансированных по Хайдеру-Картрайту-Харари.

Для построения процесса, находящегося в классе социоматриц, сбалансированных по Дэвису, на каждом шаге итераций необходима корректировка оценочных суждений $x_i\forall i\in I$, которая всегда выполнима. Потребность в корректировке обусловлена тем, что прибавление к социоматрице матрицы $\bar{x}^T\bullet\bar{x}$ может испортить первую, т.е. результат может оказаться не D-сбалансированным. Лемма и основанные на ней алгоритмы, показывают принципиальную возможность построения процессов, сходящихся к нужным социоматрицам.

## 2. Модель динамики социоматриц Д.Хантера

В работе Д.Хантера [7] постулируется существование четырех социально-психологических механизмов, регулирующих изменение межличностных чувств. Это — *влияние, совместимость, перенос и взаимность.* Предполагается также, что время, которое члены группы проводят в беседах со своими коллегами, для всех одинаково.

Пусть $x_{ii}(t)$ — величина чувства индивида i к j в момент времени t. Считается, что разговоры носят парный характер и в них индивиды проявляют истинные чувства друг к другу или третьему лицу. В процессе разговора двух индивидов о третьем говорящий может оказать влияние на отношение слушающего к индивиду, являющемуся предметом обсуждения. Это называется механизмом *влияния.* Конкретнее: мои чувства к Вам становятся более позитивными в той степени, в какой мои друзья говорят о Вас хорошо или мои враги говорят о Вас плохо. Кроме того, если слова говорящего оказались совместимыми с чувствами слушающего, то отношение второго к первому станет более позитивным, т.е. если Вы хорошо говорите о моих друзьях и плохо о моих врагах, то мои чувства к Вам возрастут. Это механизм *совместимости.* Используя такие механизмы Д.Хантер выписывает дифференциальные уравнения, управляющие динамикой изменения чувства индивида i к j ($i\neq j$)

$$\frac{dx_{ij}}{dt}=\alpha\bullet\sum_{k\neq ij}x_{ik}s_{kij}+\gamma\bullet\sum_{k\neq ij}p_{ik}s_{kij}+\beta\bullet\sum_{k\neq ij}x_{ik}s_{jik}+\delta\bullet\sum_{k\neq ij}p_{ik}s_{jik},$$

где $s_{ijk}$ — величина чувств (со знаком), содержащаяся в сообщении индивида i о j k-ому индивиду; $p_{ij}$ — величина чувств (со знаком), которые испытывает индивид j к i по мнению последнего.

При составлении этого уравнения использовалось два значения понятия «друг» («враг»): Вы мне друг (враг), если я люблю (не люблю) Вас или Вы любите (не любите) меня. Коэффициенты $\alpha$ и $\gamma$ характеризуют относительную важность этих двух смыслов понятия «друг» или «враг», когда я говорю о Вас с кем-то из членов группы; $\beta$ и $\delta$ — аналогичные понятия в случае, когда я говорю с Вами о ком-то другом; относительные величины $\alpha+\gamma$ и $\beta+\delta$ представляют относительную важность механизмов влияния и совместимости ($\alpha>0, \beta>0, \gamma>0, \delta>0$).

Полагая, что во время общения проявляется истинное отношение говорящих к предмету их разговора, т.е. $s_{ijk}=x_{ik}$ и $p_{ik}=x_{ki}$, $i \neq j$, после замены $s_{ijk}$ на $x_{ik}$ и $p_{ik}$ на $s_{ki}$ получим уравнение динамики в матричной форме

$$\frac{dX}{dt}=\alpha \bullet X^2+\beta \bullet XX^T+\gamma \bullet X^T X+\delta\left(X^T\right)^2, \qquad (1)$$

где диагональные элементы пока не определены.

Для уравнения динамики Д.Хантер использовал также механизмы *взаимности* (если Вы хорошо говорите обо мне, мои чувства к Вам улучшаются, и наоборот) и *переноса* (если Вы .мне нравитесь, то мои чувства к Вам станут более позитивными, так как я буду оправдывать Вас во всех сомнительных случаях. Если вы мне не нравитесь — все наоборот). Эти механизмы позволили аналогичным способом составить уравнение динамики $x_{ij}(t)$ и динамики социоматрицы •X = $\left(x_{ii}(t), 1 \le i, j \le n\right)$, которая задается уравнением (1).

Будем считать, что все отношения симметричны, т.е. $X^T=X$ и $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. В этом случае уравнение, описывающее динамику чувств

$$\frac{dX}{dt}=\varepsilon \bullet X^2, X(0)=X_0,$$

где $\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Если полагать, что $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные значения начальной симметрической социоматрицы $X_0$, соответствующие ее собственным векторам $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$, образующим ортонор-мированную систему, то решение уравнения будет иметь вид

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i\varepsilon t}\bullet \bar{x}_i^T\bar{x}_i.$$

Чтобы избавиться от особенностей решения, имеющих место в моменты времени $t_1=\frac{1}{\lambda_1 \bullet \varepsilon},\ldots,t_n=\frac{1}{\lambda_n \bullet n}$, Д.Хантер для основного случая, когда $\lambda_i \ge 0, 1 \le i \le n$, рассматривает систему в промежутке $\left[0,t^*\right), t^*=\frac{1}{\varepsilon * \lambda_{\max}}, \lambda_{\max}=\max\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$.

Матрицу $X^*=\lim X(t)/(\lambda_{\max}/1-\lambda_{\max}\bullet\varepsilon\bullet t))$ он называет *нормализованной социоматрицей.* Таким образом строится процедура (процедура Хантера), которая любой начальной симметричной социоматрице

$$X_0=\lambda_{\max}\bullet\bar{x}_1^T\bar{x}_1+\ldots+\lambda_{\max}\bullet\bar{x}_k^T\bar{x}_k+\sum_{i=k+1}\lambda_i\bullet\bar{x}_i^T\bar{x}_i, 0<\lambda_i<\lambda_{\max}, i=k+1,\ldots n$$

ставит в соответствие нормализованную социоматрицу

$$X_0^*=\bar{x}_1^T x_1+\ldots+\bar{x}_k^T\bar{x}_k.$$

Симметричная социоматрица X называется *инвариантной,* если X*=X. Именно такие матрицы являются аналогом сбалансированных социоматриц в этой модели.

Утверждается, что все сбалансированные матрицы, т.е. кластерные и сбалансированные по Хайдеру-Картрайту-Харари, инвариантны относительно процедуры Хантера. Но, как легко показать, даже в случае k=2 мера ортонормированных систем $\{\bar{x}_1,\bar{x}_,\}$ таких, что инвариантная матрица $\bar{x}_1^T\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_k^T\bar{x}_k$ есть не сбалансированная социоматрица, превосходит меру ортонормированных систем, дающих сбалансированную социоматрицу. Поскольку инвариантные относительно процедуры Хантера социоматрицы и есть искомые, то можно выразить сомнение в достаточности исходных постулатов данной модели.

## 3. Моделирование человеческих сообществ сетями автоматов с отношениями

Содержательный пример. Рассмотрим систему, состоящую из трех автоматов с полным ориентированным графом отношений Г=(A,B), где A = {1,2,3} — множество вершин, в которых помещены автоматы; B = {(i,j), Vi^j, i,jG{l,2,3}} — множество ребер, означающих наличие определенного отношения автомата i к j. Каждое ребро (ij)GB помечено символом f(i,j)GY = {—!, + !}, где Y —.множество состояний отношений;

f(i,j)=+1, если автомат i позитивно «относится» к j, и f(i,j) = —1, если отношение негативное. Набор состояний отношений f = $\{ f(i,j) \in Y, \forall (i,j) \in B \}$ задает структуру отношений на графе Г. Предполагается, что каждый автомат в каждый момент находится в некотором состоянии, принадлежащем множеству состояний X = { + 1, -1}, где состояние, обозначенное символом " + 1", может интерпретироваться как позитивное, а "-1" — негативное. Кроме того каждый автомат наделен набором «психических» реакций, образующих группу в алгебраическом смысле. В данном примере группа G состоит из единичного элемента е и элемента g такого, что $g^2$ = е. Другими словами, G = {g: $g^2$=e} реализована в виде подстановок множества состояний X, т.е. $g: X \rightarrow X$ таким образом, что g( + l) = -l, g(-l)= + 1, е — тождественная подстановка. Каждый автомат обладает свойством выбора «психической» реакции для корректировки своего восприятия состояния соседа на графе отношений. Выбор реакции зависит от отношения выбирающего к выбираемому и задается функцией выбора $\varphi_i(x_{ii}) \forall i \in A$ А такой, что $\varphi_i = (-1) = g, \varphi_i = (+1) = e$. Следовательно, если автомат i плохо «относится» к j (f(i,j)<0), т.е. j является «врагом» i, то состояние второго воспринимается первым после корректировки на отношения как $\varphi_i(f(i,j))x_i = \varphi_i(-1)x_i = gx_i = -x_i$. Иными словами, здесь реализуется! принцип: если «врагу» хорошо, то мне плохо, а если ему плохо, то мне хорошо. Для «друга» (f(i,j)>0) отношение адекватное.

Для каждой структуры отношений $f = \{ f(i,j), \forall (i,j) \in B\}$ на данном графе на множестве состояний системы автоматов М = {x={$x_i$, $\forall i \in A$ }}, где х = $\{ x_i, \forall i \in A \}$ — состояние системы автоматов, построим дискретную однородную марковскую цепь, которую будет называть *ассоциированной* со структурой отношений

Предположим, что q($x_i$(t + 1)= $\alpha \mid x_j(t) = \beta, x_k(t) = \gamma$),

— условная вероятность смены состояния $x_i$(t) индивида i на $x_i$(t + l)= $\alpha \in F(x(t))$ = {$g_{ij}x_j$(t), $g_{ik}x_j$(t)}, где $g_{ij} = \varphi_i(f(i,j)), j,k \neq i; i,j,k \in A$. Заметим, что переход индивида в новое состояние зависит только от состояний окружения, а не от его собственного в предыдущий момент времени t. Конкретный способ построения семейства условных вероятностей по индивидуальной ранжировке каждым своих соседей по графу отношений приведен в [8]. Исходя из гипотезы о марковском характере перехода из одного состояния системы в другое, $\forall$ x,y $\in$ M получим переходную вероятность





$$P(x(t+1) = x \mid x(t) = y) = \prod_{j \in A} q(x_i(t+1) = x_i \mid x_j(t) = y_j, x_k(t) = y_k)$$

Естественно предположить, что реально наблюдаются те и только те групповые структуры, у которых матрица переходных вероятностей соответствующей ассоциированной с ней марковской цепи имеет предел при t–> + °°. В [8] показано, что для триад с симметричными отношениями предел матриц переходных вероятностей существует для тех и только тех структур отношений, которые сбалансированы по Хайдеру-Картрай-ту-Харари.

Анализ модели показал, что критерий отбора структур отношений по существованию предела матрицы переходных вероятностей ассоциированной марковской цепи эквивалентен критерию отбора тех структур, у которых ассоциированные с ними марковские цепи имеют максимальное число стационарных мер (максимум берется по всем структурам отношений). Последний принцип отбора, который здесь называется *принципом максимальной неэргодичности* [9], будет применяться в общем случае, который изложен ниже.

В рамках данной модели была предпринята попытка формализовать *понятие диссонанса* — основное понятие теории Л.Фестингера.

Структура отношений {f(i,j), $\forall (i,j) \in B$ } называется *бездиссонансной,* если можно найти множество состояний системы N$\subseteq$CM такое, что: а) $\forall i \in A$ и $\forall \alpha \in X$ существует состояние системы x = $\{ x_i \ \forall i \in A \} \in N$, при котором $x_i$ = α; б) $\forall x \in N$ выполняется $\varphi_i(f(i,j))x_i = \varphi_i(f(i,k))x_k \forall j,k$, являющихся соседями i по графу отношений.

Это означает, что у каждого индивида не вызывают диссонанса только два крайние представления об устройстве мира: в разные моменты времени он может быть либо очень хорошим, т.е. всем моим друзьям хорошо, а врагам — плохо, либо очень плохим, т.е. всем моим друзьям плохо, а врагам — хорошо, а все остальные промежуточные варианты вызывают диссонанс.

Структуры отношений, обеспечивающие каждому только зги дна варианта, являются бездиссонансными. Столь контрастное восприятие мира связано с использованием реакции g, реализующей столь же экстремистский принцип реагирования. Анализ модели с реакциями, реализующими более мягкие принципы, не привел к появлению всего набора структур, сбалансированных по Хайдеру-Картрайту-Харари, и только их, что необходимо по условиям задачи.

Следовательно, не нужно думать слишком хорошо о действительных принципах, которыми люди, быть может бессознательно, руководствуются в своем поведении.

Оказалось, что все сбалансированные структуры являются бездиссонансными, но не все бездиссонансные — сбалансированными.

Искомые сбалансированные структуры не получаются и в случае, когда изменение состояния индивида определяется не только состоянием окружения в предыдущий момент, но и своим собственным. То есть выбор оператора F не является случайным.

Перейдем к изложению общей теории.

**Формализованное описание модели и ее свойства.** *Моделью сообщества с отношениями* называется объект

$U = \{\Gamma = (A,B)$; Y и $f{:}B \to Y$; $X_i$ и $G_i$, $\forall i \in A; \varphi_i : Y -> 2^{G_i}, \forall i \in A\}$, где Г=(A,B) — граф отношений; A — множество вершин; B — множество ребер, кодирующих наличие взаимоотношений между членами сообщества; Y — множество состояний отношений между членами сообщества; $f{:}B \to Y$ — функция отношений между членами сообщества (f(i,j) — состояние отношения члена сообщества i к j); $X_i$ — множество состояний автомата i (это может быть неупорядоченное, линейно упорядоченное или частично упорядоченное множество с любыми дополнительными свойствами); $G_i = \{g\}$ — группа (множество с одной алгебраической операцией) реакций автомата i, где g — реакция («психическая» реакция), реализованная как взаимнооднозначное преобразование $X_i$ на себя; $\varphi_i$ — теоретико-множественное отображение (функция влияния), характеризующее влияние отношений между членами сообщества на выбор реакции (в общем случае может зависеть не только от отношений, но и состояний окружающей среды, текущего состояния автомата и его предыстории).

Предполагается, что Г является связным, ориентированным конечным графом без петель, обладающий *свойством взаимности:* если $(ij) \in B$, то $(j,i) \in B$.

Для простоты будем считать, что $\forall i \in A$, $X_i = X$, $G_i = G$, где X — конечное или счетное множество.

*Разметкой ребер графа G реакциями* называется множество $R = \{g_{i,j}\ \forall (i,j) \in B\}$. Будем рассматривать только такие разметки R, для которых существует функция отношений f такая, что $g_{i\ j} \in \varphi_i(f(i,j)) \forall i \in A$ и произвольных $j \in \Delta\{i\}$, где $\Delta\{i\}$ — множество





«соседей» автомата i на Г. Отношения считаются симметричными, если f(i,j)=f(j,i).

*Состоянием системы* называется функция $x = \{x_i\ \forall i \in A\}$. Обозначим Jm(x) множество значений x как функции на A, $Jm(x) \subset CX$, а M — множество состояний системы.

*Динамика состояний* системы задается с помощью семейства условных вероятностей $O = \{q_i(x/x_i\ \forall j \in \Delta\{i\})\ \forall i \in A\}$, которое можно определить с помощью ранжировки отношений или иным способом. Предполагается, что $q_i(x/x_i\ \forall j \in \Delta\{i\}) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in [x_i \forall j \in \Delta\{i\}]$, где $[x_1,\dots,x_m]$ просто неупорядоченное множество, подрешетка, выпуклая подрешетка или идеал решетки X, построенный по элементам $x_1,\dots,x_m$, если X — решетка.

Пусть $x(t) = \{X_i(t)\ \forall i \in A\}$ — состояние сообщества в момент времени t (время дискретное). Марковская цепь на множестве состояний сообщества M определяется как переход с некоторой вероятностью из состояния x(t) в x(t + l), принадлежащее множеству

$$F(x(t)) = \prod_{j \in A}[g_{i,j}(x_j(t))\ \forall j \in \Delta\{i\}].$$

Теоретико-множественное отображение F задает такой тип *поведения всех автоматов* сообщества, при котором состояние автомата в момент t+1 целиком зависит от состояний непосредственного окружения в предыдущий момент t (но не от его собственного). Содержательно это соответствует случаю «эмоционального резонанса» или «конформистского поведения». Меняя определение F, получим другие варианты избирательности поведения автоматов, а следовательно, другие модели.

Предположим, что в случае счетного X рассматриваются разметки, обладающие следующим свойством: для любого состояния системы $x \in M$ множество $\bigcup Jm(F^k(x))$ конечно. Здесь: $F^2(x) = F(F(x)) = \cup F(y)$ (объединение берется по всем $y \in F(x)$), $F^3(x) = F(F^2(x)),\dots, F^p(x) = F(F^{k-1}(x))$; $Jm(F^k(x)) = \cup Jm(F(y))$ (объединение по всему $y \in F^k(x)$).

Из этого предположения следует, что марковская цепь па M распадается на не связанные между собой компоненты, имеющие конечные непересекающиеся подмножества счетного множества X в качестве совокупности состояний автоматов сообщества. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что X конечно.

Если семейство условных вероятностных мер Q задано, то на множестве вероятностных мер определен марковский оператор

$$\mu Q(x) = \sum_{y \in F^{-1}(x)} \mu(y) \prod_{j \in A} q_i(y_i / g_{ij} x_j \forall j \in \Delta\{i\}) ,$$

где $\mu$ - произвольная вероятностная мера.

Предполагается, что *сообщество устойчиво,* т.е. обнаруживает интуитивно ясное согласованное поведение, которое обеспечивает продолжительный режим функционирования сообщества, исключающий возникновение диссонанса у каждого его члена.

*Согласованное поведение* системы автоматов — это такое соответствие между сложившейся системой отношений и используемыми реакциями, с одной стороны, и состояниями автоматов, с другой, при котором каждый из них после корректировки на отношения получит одну и ту же информацию от всех членов своего окружения. Иными словами, согласованное поведение — это поведение, при котором бездиссонансная структура отношений таковой остается в течение некоторого времени. Это означает выполнение $\forall i \in A$ равенств $g_{ij} x_j = g_{ik} x_k$. $\forall j,k \in A\{i\}$ не только для состояний системы из семейства $N \subset M$, но и для его образа при теоретико-множественном отображении F, т.е. для F(N). Но это равносильно включению $F(N) \subset N$.

Пусть $M_0 = \{x \in M: | F(x) | =1)$, где $|F(x)|$ - число элементов в множестве F(x); $\Gamma^* = (A^*,B^*)$, где $(i,j) \in B^*$, если $\exists k \in A$ такое, что $(i,k),(k,j) \in B$, $A^*=A$ и если R — разметка графа Г, го $R^*=\{a_{ij}(k)\})$ $\forall$ $(i,j) \in B^*\}$ — разметка графа Г*, порожденная R (здесь $a_{i,j}(k) = g_{k,i}^{-1}$.). Аналогично любой путь на графе Г индуцирует путь или семейства путей на Г*. Если $L_{i_1,i_n} = \{(i_1,i_2), ..., (i_{n-1},i_n)\}$ — произвольный ориентированный путь на графе Г, то $R(L^*) =$

$= g_{i_1,i_2} ... g_{i_{n-1},i_n}$ .

Если L* — произвольный ориентированный путь на графе Г*, и $L^* = \{(i_1,i_2,i_3), (i_3, i_4, i_5),\ldots, (i_{2k-1}, i_{2k}, i_{2k+1}) \}$, где (i, j, k) – это ребро (i,k) графа $\Gamma^*$, которое соответствует пути {i,j), (j,k)} на графе Г, то $R(L^*) = a_{i_1,i_3}(i_2)\ldots a_{i_{2k-1},i_{2k+1}}(i_{2k})$ .

В этих обозначениях *принцип согласованного поведения.* эквивалентен выполнению следующих двух условий: 1) $M_o \neq \varnothing$ 2) $F(M_0) \subseteq M_o$.

Будем говорить, что разметка R графа Г удовлстворяет *условию A1,* если для любой вершины i и любого пути $L^*_{i,i}$ на графе





Г* выполняется равенство $R(L^*_{i,i}) = e$, где e — единица группы G; разметка R графа Г удовлетворяет *условию A2,* если для любой вершины $i \in A$ такой, что $\Delta A\{i\}_=$ содержит не менее двух элементов, выполняются равенства $g_{ij}g_{ji} = g_{i,k}g_{k,I}$ $\forall j,k \in \Delta \{i\}$.

В этом случае реакцию $a_i=g_{i,j}g_{j,i}$, назовем *характеристической реакцией элемента* i. Если $a_i=a$ $\forall i \in A$, то реакцию a назовем *характеристической реакцией сообщества* .

Свойства характеристических реакций:

1) $g_{i,j}a_j = a_i g_{i,j}$, $a_i^{-1} g_{i,j} = g_{i,j}a_j^{-1}$, $a_j g_{i,j}^{-1} = g_{i,j}^{-1} a_i$;

2) $a_i a_j = a_j a_i$, если $(i,j) \in B$;

3) $g_{i,j} = g_{i,j}^{-1} a_j$, $g_{i,j} = a_i g_{j,I}^{-1}, g_{i,j}^{-1} = a_j^{-1} g_{j,I} a_i^{-1}$.

Из 1)— 3) следует, что для любого ориентированного маршрута $L_{i,k}$ на графе Г выполняется $a_i R(L_{i,k}) = R(L_{i,k})a_k$, $a_i^{-1}R(L_{i,k})=R(L_{i,k})a_k^{-1}$.

Кроме того $\forall$ i, j, k, s, $t \in A$ таких, что $(i,k),(k,j)_{)}(j,s),(s,t) \in B$

Для разметки R графа Г, удовлетворяющей условиям Al— A2, выполняется соотношение

$$(R(L_{i,i}))^2 = a_i^{|L_{i,i}|} (R(L_{i,i}) = a_i^{|L_{i,i}|/2})$$

для любой вершины $i \in A$ и любого замкнутого ориентированного маршрута $L_{i,i}$ нечетной (четной) длины $|L_{i\ i}|$. Если символом $L_{i,i}^{-1}$ обозначить маршрут, имеющий ориентацию, противоположную $L_{i,i}$, то из предыдущего свойства вытекает равенство $R(L_{i,i}^{-1}) = R(L_{i,i})$ для любого замкнутого $L_{i,i}$ и любой R, удовлетворяющей A1 — A2.

Лемма. *Для связного графа Г достаточным условием существования разметки R, обеспечивающей согласованное поведение ($M_o \neq \varnothing; F(M_0) \subseteq M_0$), является выполнение условий A1 —A2*[1].

Заметим, что если у графа Г есть вершина i, множество $\Delta$ {i} которой содержит более двух вершин, выполнение A1 — A2 необходимо для согласованного поведения.

Лемма позволяет легко описать множество $M_0$. Если Г — граф отношений, не являющийся двудольным, то $M_o = \{ \varphi(x) \forall x \in X \}$, где $z(x) = \{x_j = R(L^*_{i,j})x$ $\forall j \in A$, где $L_{i,I}^*$ путь на Г*}, i — произвольная фиксированная вершина и $x_i=x$. Если Г — двудольный

'Доказательство леммы и сформулированных ниже теорем 1 и 2 см. Приложение.

граф $A=A_1 U A_2$, $A_1 \cap A_2 = 0$ и $\Gamma_i^* = (A_i, B_i^*)$ — две связные компоненты несвязного графа $\Gamma^*$, $i = 1,2$, то $M_o = \{z(x,y) \ \forall x,y \in X\}$, где $z(x,y) = \{x_s = R(L_{s,i}^{(1)*})x \ \forall s \in A_1; x_k = (L_{k,j}^{(2)*})y \ \forall k \in A_2$; i, j - произвольные фиксированные вершины, соответственно принадлежащие $A_1, A_2$; $L_{s,i}^{(1)*}$, $L_{k,j}^{(2)*}$ — ориентированные маршруты на $\Gamma_1^*$ и $\Gamma_2^*$ соответственно; $x_i = x$ и $x_j = y$.

Обозначим символом D(M) ($D(M_0)$) граф переходов марковской цепи, построенный на состояниях систем M($M_0$).

**Теорема 1.** *Для любой разметки R, удовлетворяющей условиямА! —А2, верны следующие свойства:*

*а) для любого $x \in M$ на графе переходов D(M) существует ориентированный маршрут конечной длины из x в $M_0$;*

*б) $M_0$ и только оно является множеством существенных, состояний, т.е. попав в это множество система никогда из него не выйдет.*

Из теоремы 1 следует, что свойства изучаемой марковской цепи целиком определяются структурой $D(M_o)$. Любая компонента связности графа переходов $D(M_0)$ есть простой ориентированный цикл, на котором сосредоточено ровно одно стационарное распределение, которое назовем *базисным.* Любая стационарная мера есть линейная комбинация базисных мер. Следовательно, число компонент связности графа $D(M_0)$ на единицу больше размерности симплекса стационарных мер марковской цепи. Возьмем это число в качестве меры ее неэргодичности.

На множестве разметок, удовлетворяющих условиям А1 — А2, введем *правило отбора* тех разметок, которые дают максимальное число компонент связности $D(M_0)$. Максимум берется по всему указанному множеству разметок, а следовательно, по всем системам отношений, согласованным с этими разметками. Дополнительные условия на реакции, составляющие разметки, дающие максимальное число компонент связности, будем называть условиями *сбалансированности разметок.*

**Теорема** 2. *1. Предположим, что граф отношений* $\Gamma$ *не является двудольным. Пусть i — произвольная фиксированная вершина. Тогда для любой разметки R, удовлетворяющей условиям А1 —А2, и любого $z(x) \in M_0$ выполняются равенства*

$$F(z(x)) = z(b_i x), \ F^2(z(x)) = z(a_i x)$$

*где $b_i = g_{i,j} R(L_{j,i}^*)$ и не меняется* $\forall j \in \Delta\{i\}$ *и любого ориентированного маршрута $L_{j,i}^*$, на графе* $\Gamma^*$.





*2. Если граф отношений* $\Gamma$ *— двудольный и i, j — произвольные фиксированные вершины, принадлежащие $A_1$ и $A_2$ то для любой разметки R, удовлетворяющей А1 — А2, и любого $z(x,y) \in M_o$ $F(z(x,y)) = z(b_{i,j}, b_{j,i})$, $F^2(z(x,y)) = z(a_i x, a_j y)$, где $b_{i,j} = g_{i,s} R(L_{s,j}^{(2)*})$ и* $b_{j,i} = g_{i,k}(L_{k,I}^{(1)*})$ *не зависят от способа выбора* $s \in \Delta\{I\}$, *$k \in \Delta\{i\}$ и ориентированных маршрутов $L_{s,j}^{(2)*}$ на* $\Gamma_2^*$ и $L_{k,I}^{(1)*}$ *на* $\Gamma_1^*$.

Теорема 2 позволяет решить вопрос о дополнительных условиях на реакции разметок, удовлетворяющих *Al —А2* и дающих максимальное число компонент связности графа переходов $D(M_0)$.

Из первой части теоремы 2 следует, что $b_i^2 = a_i$ для графа отношений, не являющегося двудольным. Заметим, что не для всех характеристических реакций $a_i$ уравнение $v^2 = a_i$ имеет решение. Предположим, что это уравнение разрешимо. Подстановки, имеющие в своем разложении максимальное число независимых циклов, включая единичные (максимум берется по всем решениям уравнения $v^2 = a_i$), назовем *латентными характеристическими реакциями* и обозначим символом $b_i$. Тогда условие сбалансированности разметок примет вид

$$R(L_{i,i}) = b_i a_i^{(|L_{i,i}-1|)/2} = b_i^{|L_{i,i}|}$$

Предположим, что $a_i = (A_1)...(A_r)$, где($A_k$) — циклическая перестановка элемента множества

$$A_k, 1 \le k \le r, \ |A_k| = 2 * m_k + 1, \ X = \bigcup_{k=1}^{r} A_k, A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \ne j$$

Тогда

$$b_i = (A_1)^{m_1+1} ... (A_k)^{m_k+1} ... (A_r)^{m_r+1},$$

и условие сбалансированности на элементах множества ($A_k$) таково

$$R(L_{i,i}) = a_i^{(|L_{i,i}|-1)/2-m_k}, 1 \le k \le r$$

Отметим, что в случае недвудольного графа отношений число независимых циклов в разложении латентной характеристической реакции равно числу компонент связности графа переходов $D(M_0)$. Отсюда следует, что начальное распределение на M определяет дискретную случайную величину, принимающую значения на множестве длин циклов разложения подстановки $b_i$ на независимые циклы. Это означает, что состояния сообщества автоматов с какой-то вероятностью циклически меняются.

Из второй части теоремы 2 следует, что $b_{i,j} b_{j,i} = a$, и $b_{ji} b_{ij} = a_j$ для двудольного графа отношений. Предположим, что характеристические реакции $a_i$ и $a_j$ таковы, что уравнения $v^* w = a_i$,

$w*v = a_i$ имеют решения. Определим на $X\times X$ подстановку $\sigma$ следующим образом: $\sigma((x,y)) = (wy,vx)$ для любой $(x,y)\in X\times X$. *Латентными характеристическими реакциями в случае двудольного графа* отношений Γ называются те решения уравнения $v*w = a_i$, которые максимизируют число циклов в разложении на независимые циклы подстановки $\sigma$. Обозначим эти решения символами $b_{i,j}$ и $b_{j,i}$. Условия сбалансированности разметок (в обозначениях теоремы 2) имеют вид

$$R(L_{i,j})=a_i^{\left|L_{s,j}{}^{(2)*}\right|}b_{i,j} \text{ и } R(L_{j,i})=b_{j,i}a_i^{\left|L_{k,i}{}^{(1)*}\right|}$$

**Приложение общей модели к анализу на сбалансированность групповых структур контактных групп**. Несмотря на то, что общая модель разработана для произвольного графа отношений со свойством взаимности, в этом пункте анализируется важный для приложений случай полного графа отношений, характерный для контактных групп.

Предположим, что ориентированный граф отношений $\Gamma_n$ — полный, n — число элементов в группе. Будем считать, как и выше и с той же интерпретацией, что $X = \{+1, —1\}$, $Y = \{+1, -1\}$, $G = \{g{:}g^2=e\}$, $\varphi(-1) = g$, $\varphi(+1) = e$. Условие сбалансированности разметок требует выбора такого $a_i\in G$, чтобы характеристическое уравнение $v^2=a_i$ имело решение (теорема 2). Заметим, что уравнение $v^2=a_i$ не имеет решения, если $a_i$ в своем разложении на циклы содержит один цикл четной длины. Поэтому, так как $a_i$. может быть либо g, либо e, а g=(+1,-1) в своем разложении содержит один цикл четной длины и, значит, уравнение $v^2=g$ не имеет решения, то $a_i$=e. Таким образом, e является характеристической реакцией сообщества и, следовательно, $g_{ij}g_{ji}$=e; и так как $g_{ij}{}^2 = g_{ji}{}^2 = e$, то $g_{ij} = g_{ji}$, т.е. разметки, удовлетворяющие условиям А1-А2, могут быть только симметричными и, в силу взаимнооднозначного соответствия между разметками и структурами отношений, f(i,j)=f(j,i) $\forall(i,j), i\neq j$.

В группе G уравнение $v^2$ = e имеет два решения g и e, но разложение e на циклы содержит два цикла, а g — один. Следовательно, $b_i$ = e и условие сбалансированности разметок имеет вид $R(L_{ii})$ = e. В силу полноты графа $\Gamma_n$ и симметричности разметок условие сбалансированности достаточно проверить для циклов вида $L_{ii} = \{(i,j), (j,k), (k,i)\}$, где i, j, k — любые три попарно различные вершины. Равенство $R(L_{ii}) = g_{i,j}g_{j,k}g_{k,i}$=e с точностью





до перестановок индексов может быть только в двух случаях: $g_{i,j} = g_{j,k} = g_{k,i}$=e и $g_{i,j}$ = e, $g_{j,k} = g_{k,i}$=e. Заметим, что так как $a_{ii}(k) = g_{ki}{}^{-1}g_{ki} = g_{ki}g_{ki} = (g_{ik}g_{ki}g_{ii})g_{ii}$, $L_{ii}{}^{*} \approx L_{ii}$, то условие А1 выполняется: $R(L_{ii}{}^{*}) = R(L_{ii})^2$=e. Таким образом, условие сбалансированности разметок в этом случае полностью совпадает с условием сбалансированности по Хайдеру-Картрайту-Харари для структур отношений.

Ничего в принципе не изменится, если X = {—1, +1} заменить на X={-m, -m + 1,..., —1,0, 1,..., m—1, m}, m>2 или X={0,1}.

Для получения структур отношений, сбалансированных по Девису, на графе $\Gamma_n$ необходимо в качестве группы реакций взять $G = \{g_1,...,g_n{:}g_ig_j = g_jg_i$ и $g_i{}^2=e \ \forall i,j\in I\}$ и приравнять $\varphi(-1) = \{g_1,...,g_n\}$, $\varphi(+1) = \{e\}$ , p(+1)={e}. В этом случае принцип максимальной неэргодичности отберет те и только те структуры отношений, которые сбалансированы по Дэвису. Заметим, что чем больше кластеров в структуре отношений, тем больше разных, отличных от единичной, реакций необходимо использовать. Следовательно, число антагонистических подгрупп (кластеров) ограничивается числом различных реакций, используемых членами сообщества.

## Приложение

**Доказательство леммы**. Известно [15, с.139], что любой связный граф Γ содержит максимальный двудольный граф В = ($A_1\cup A_2$, $V$ А,иА$_2$,У),который также связан и покрывает вершины Γ. Здесь $A=A_1 U A_2$, $A_1\cap A_2=\varnothing 0$ и каждое ребро, принадлежащее Γ, соединяет некоторую пару вершин из $A_1$ и $A_2$. Отсюда следует, что, если граф Γ — недвудольный, то граф $\Gamma^*$ связан, а если Γ — двудольный, то $\Gamma^*$ распадается на две связные компоненты $\Gamma^*$ и $\Gamma_2{}^*$.

1°. Пусть $M_0\neq\varnothing$; предположим, что $x=\{x_i, \ \forall i\in A\}\in M_0$, т.е. |F(x)|=1. Но $F(x)=\prod\left[g_{ij}x_j \forall j\in\Delta\{i\}\right]$, означает, что $\forall i\in A$ $g_{i,j}x_j = g_{i,k}x_k$, $\forall j,k\in\Delta\{i\}$ или $x_j=a_{j,k}(i)x_k$. Откуда следует, что если Γ — недвудольный, то выбрав произвольную фиксированную вершину $i \in A$, $\forall j \in A$ $x_j = R(L^*_{j,i})x_i$, где $L_{j,i}^*$ — произвольный ориентированный маршрут из j в i на Г*.

Так как равенство $x_j = R(L_{j,i}^*)x_i$ должно выполняться для любого ориентированного маршрута $L_{j,i}^*$. на $Г^*$, то $R(L_{j,i}{}^*)x_i = R(\tilde{L}_{j,i}^*)x_i$ для любых двух маршрутов $L_{j,i}$ и $\tilde{L}_{j,i}^*$ на Г*. Из легко проверяемого равенства $R(L_{j,i}^*)^{-1} = R(L_{i,j}^*)$ следует, что $x_i = R(L_{j,i}^*)^{-1}R(\tilde{L}_{j,i}^*)x_i = R(L_{i,j}^* \cup \tilde{L}_{j,i}^*)x_i = R(L_{i,i}^*)x_i$. Из произвольности i,j и маршрутов $L_{j,i}^*$, $\tilde{L}_{j,i}^*$ на Г* следует выполнение равенства $R(L_{i,I}^*)x_i = x_i$ для произвольного замкнутого ориентированного маршрута $L_{i,i}^*$ на Г* и $\forall i \in A$. Таким образом, в случае недвудольного графа доказано, что если $M_0 \neq \varnothing$ и $x \in M_0$, то $x = \{x_j = R(L_{j,i}^*)X_i \quad \forall j \in A\}$, и это определение корректно, если выполняется равенство $R(L_{i,i}^*)x_i = x_i$ $\forall j \in A$ и произвольного ориентированного пути $L_{i,i}^*$ на Г*.

Если Г-двудольный граф и i,j — произвольные фиксированные вершины на $A_1$, $A_2$, соответственно, то аналогично доказывается, что, если $x \in M_0$, то $x = \{x_s = R(L_{s,i}^{(1)*})x_i \quad \forall s \in A_1;$ $x_k = R(L_{k,j}^{(2)*})x_j \quad \forall k \in A_2\}$, и корректность этого определения требует выполнения равенств $R(L_{i,i}^{(1)*})x_i = x_i$ и $R(L_{j,j}^{(2)*})x_j = x_j$ $\forall i \in A_1$, $\forall j \in A_2$ и произвольных ориентированных путей $L_{i,i}^{(1)*}$ на $Г_1^*$ и $L_{j,j}^{(2)*}$ на $Г_2$*.

Так как условие согласованности не вводит ограничений на принимаемые автоматами состояния, т.е., если фиксировать произвольное $i \in A$, то автомат i может принимать любое значение из X, а остальные, в силу согласованности поведения, должны подстраиваться под него, то условие $R(L_{i,i}^*)x_i = x_i$ будет выполняться $\forall x_i \in X$ и, следовательно, $R(L_{i,i}^*) = e$ в обоих случаях.

2°. Пусть $R(L_{i,I}^*) = e$ для произвольного ориентированного пути $L_{i,i}^*$, на $Г^*$. Тогда, как легко проверить, верно равенство $g_{k,j}R(L_{j,j}^*) = g_{k,s}R(L_{s,i}^*)$ $\forall k \in A$ и $\forall j,s \in \Delta\{k\}$. Поэтому в случае недвудольного графа Г $\forall x \in X$ состояние $z(x) = \{R(L_{j,i}^*)x_i, \ \forall j \in A\}$ корректно определено и принадлежит $M_0$, и из рассуждений п.1° следует, что $M_0 = \{z(x) \quad \forall x \in X\}$. Здесь i-произвольная фиксированная вершина на Г. Аналогично показывается, что в случае выполнения условия A1 для двудольного графа $ГM_0 = \{z(x,y) \ \forall x,y \in X\}$, где $z(x,y) = \{R(L_{s,i}^{*(1)})X_i \ \forall s \in A_1; \ R(L_{k,j}^{(2)*})x_j \ \forall k \in A_2\}$. Докажем включение $F(M_0) \subseteq M_o$. Пусть произвольная вершина $i \in A$ такова, что $|\Delta\{i\}| \geq 2$. Тогда $\forall x = \{x_i \ \forall i \in A\} \in M_0$





$F(x) = \{g_{j,i}x_i, \ \forall j \in A$ и $i \in \Delta\{j\}\}$ i-ая координата $F^2(x)$ имеет вид $[g_{i,j}g_{j,i}x_i, \ \forall j \in \Delta\{i\}]$. Следовательно, $|F^2(x)| = 1$ тогда и только тогда, когда $g_{i,j}g_{j,i} = g_{i,s}g_{s,i}$ $\forall j,s \in \Delta\{i\}$. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 1.** Проведем доказательство для недвудольного графа Г и произвольно разметки R, для которой выполнены условия A1-A2. Рассмотрим подграф D графа Г, состоящий из одного простого цикла C, имеющего нечетное число ребер, и совокупности деревьев, примыкающих к вершинам цикла. Такой подграф легко получить из максимального дерева, воспользовавшись связностью И недвудольностью графа Г. Предположим, что $x = \{x_i; \ \forall i \in A\}$ — произвольное начальное состояние системы. Зафиксируем произвольную вершину $i_0$, и будем следить за распространением состояний автоматов, полученных из $x_{i0}$ корректировкой на отношения реакциями из R, вызванных итерационным применением теоретико-множественного оператора $F^2$. Пусть $|C| = 2k + l$, а максимальное число уровней деревьев, примыкающих к вершинам цикла, равно 1. Положим m = $\max\{k,[^l/_2] + l\}$, где [*a*] — целая часть *a*. Тогда, как легко проверить непосредственно, через m итераций множеству $F^{2m}(x)$ будет принадлежать состояние системы $y = \{y_i = R(L_{i,io})a^t_{io}x_{io} \ \forall i \in A\}$, где $L_{i,io}$ — кратчайший путь четной длины, соединяющий i с $i_0$ на графе D, а $t = m - |L_{i,i_0}|/2$. Но так как $R(L_{i,i0}) = R(L^*_{i,i0})$, где $s = |L_{i,i0}|/2$, а $L^*_{i,i0}$ - образ пути $L_{i,io}$ на графе Г , то $R(L_{i,io})a^t_{i0}x_{i0} = R(L^*_{i,i0})a_i^m x_{io}$ и, следовательно, $y = z(a_i^m x_{io}) \in M_0$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы для двудольного графа Г несколько иное. В этом случае множество вершин разбивается на сумму двух непересекающихся подмножеств ($A = A_1 U A_2$, $A_1 \prod A_2 = \varnothing$, $A_1 \neq \varnothing$, $A_2 \neq \varnothing$), и начальная вершина любого ребра принадлежит одному подмножеству, а конечная — другому. Зафиксируем произвольные вершины $i_0 \in A_1$, $j_0 \in A_2$ и для любого начального состояния системы $x = \{x_i; \ \forall i \in A\}$ будем следить за распространением состояний, полученных из $x_{i0}$ и $x_{jo}$ корректировкой на отношения реакциями из R, вызванных последовательным применением оператора $F^2$. Пусть $K(i) = \{j : (i,j) \in B\}$. Тогда в силу связности графа и свойства взаимности, получаем включения (для $A_1$) $K^{2s}(i_0) \subset K^{2(s+1)}(i_0)$ и $K^{2s}(i_0) = K^{2(s+1)}(i_0)$, только если $K^{2s}(i_0)=A^1$. Для $A_2$ все аналогично. Отсюда, в силу конечности множеств $A_1$ и $A_2$, следует существование натуральных чисел k и s таких, что $K^{2*k}(i_0)=A_1$, $K^{2*s}(j_0)=A_2$. Если положить m = max(k,s), то $K^{2m}(i_0)=A_1$ и $K^{2m}(j_o)=A_2$. Здесь $K^2(i) = \bigcup K(j)$ и $K^s(i) = K(K^{s-1}(i))$. Легко проверить, что через m итераций $F^{2m}(x)$ будет содержать состояние системы $y=\{y_i=R(L_{i,i0})a^p_{i0}x_{i0} \quad \forall i\in A_1;$ $y_j = R(L_{j,j_0})a^q_{j0}x_{j0} \forall j \in A_2\}$, где - $L_{i,io}$ и $L_{j,jo}$ кратчайшие пути из i в $i_0$ и из j в $j_0$ на графе отношений, p = m-$|L_{i,io}|$/2, q = m-$|L_{j,jo}|$/2, а 2m = $\max\{\max|L_{i,io}|, \max|L_{j,jo}|\}$. Повторив те же рассуждения, что и в случае недвудольного графа, получим равенство y=z($a^m_{io}x_{io}, a^m_{jo}x_{jo}$), которое доказывает утверждение.

**Доказательство теоремы 2.** Предположим, что граф Г не является двудольным и выбрана произвольная фиксированная вершина. Из равенства $g_{j,t}R(L^*_{t,i}) = g_{j,s}R(L^*_{s,i})$ верного для любых $t,s\in \Delta\{j\}$ и произвольных путей $L^*_{t,i}$ и $L^*_{s,i}$ на графе Г*, следует корректность равенства $b_i = g_{i,t}R(L^*_{t,i})$. Так как

$$F(z(x)) = \prod[g_{i,t}x_t, \forall t\in\Delta\{j\}] = \prod[g_{i,t}R(L^*_{t,i})x, \forall t\in\Delta\{j\}]$$

то F(z(x)) = z(bjX) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $g_{j,t}R(L^*_{t,i})x = R(L^*_{j,i})b_i x, \forall x\in X$, т.е. когда

$$g_{j,t}R(L^*_{t,i}) = R(L^*_{j,i})g_{i,s}R(L^*_{s,i}) \qquad \forall s\in\Delta\{i\}, \quad \forall t\in\Delta\{j\}$$

и произвольных путей $L^*_{t,i}, L^*_{j,i}, L^*_{s,i}$ на $\Gamma^*$. Но последнее равенство эквивалентно условию А1. Действительно, поскольку $R(L^*_{i,j})^{-1} = R(L^*_{j,i})$, то оно эквивалентно равенству $a_i = R(L^*_{i,j})\, g_{j,t}\, R(L^*_{t,i} \cup L^*_{i,s})g_{s,i}$. Так как $R(L_{i,i}) = a_i^{|L_{i,i}|/2}$, если $|L_{i,i}|$ — четное число, то

$$R(L^*_{i,j})g_{j,t}R(L^*_{t,s})g_{s,i} = a_i^{-|L^*_{i,j}|-|L^*_{t,s}|}\cdot R(L_{i,i}) = a_i^{-|L_{i,i}|/2+1}\cdot a_i^{|L_{i,i}|/2} = a_i$$

и требуемое доказано. Из равенства $(R(L_{j,i}))^2 = a_i^{|L_{i,i}|/2}$ для любого маршрута нечетной длины получается, что

$$b_i^2 = (g_{i,i}R(L^*_{i,i}))^2 = (a_i^{-|L_{j,i}|}\cdot R(L_{i,i}))^2 = a_i^{-2|L_{j,i}|}\cdot (R(L_{i,i}))^2 = a_i^{|L_{i,i}|+1}a_i^{|L_{i,i}|} = a_i,$$

и, следовательно, $F^2(z(x)) = z(b_i^2 x) = z(a_i x)$.

Первая половина теоремы 2 доказана.

Для двудольного графа Г ( $A=A_1 \cup A_2$, $\Gamma_1^*$ и $\Gamma_2^*$ — связные компоненты несвязного графа $\Gamma^*$) равенство

$F(z(x_1y))=z(g_{i,k}R(L^{(2)*}_{k,i})y,\ g_{j,l}R(L^{(1)*}_{l,i})x) \quad \forall k\in\Delta\{i\}, \quad \forall l\in\Delta\{j\}$ и произ-



вольных путей $L^{(2)*}_{k,i}$ и $L^{(1)*}_{l,i}$ на $\Gamma_2^*$ и $\Gamma_1^*$ соответственно эквивалентно равенствам ($\forall k\in A_1$, $\forall t\in\Delta\{k\}\subset A_2$, $\forall s\in A_2$, $\forall l\in\Delta\{s\}\subset A_1$ и произвольных путей $L^*_{t,i}$, $L^*_{s,i}$ на $\Gamma_2^*$ и $\Gamma^*_{l,i}$, $L^*_{k,i}$ на $\Gamma^*_1$): $g_{k,t}R(L^*_{t,j}) = R(L^*_{k,i})b_{i,j}$ и $g_{s,l}R(L^*_{l,i}) = R(L^*_{s,j})b_{j,i}$. Здесь i, j ($i\in A_i$; $j\in A_j$) - произвольные фиксированные вершины Г. Доказательства этих равенств аналогичны доказательствам подобных равенств для недвудольного графа Г.

Докажем, что $b_{i,j}b_{j,i} = a_i$, $b_{j,i}b_{i,j} = a_j$. Действительно,

$$b_{i,j}b_{j,i} = g_{i,s}R(L^{(2)*}_{s,i})\, g_{i,t}R(L^{(1)*}_{t,i}) = a_i^{-|L^{(2)*}_{s,j}|-|L^{(1)*}_{t,i}|} * R(L_{i,i}) = a_i^{-|L_{i,i}|/2+1} * a_i^{|L_{i,i}|/2} = a_i,$$

где $s\in\Delta\{i\}$, $t\in\Delta\{j\}$, $L^{(2)*}_{s,i}$, $L^{(1)*}_{t,i}$ произвольны. Равенство $b_{i,j}b_{j,i} = a_i$ доказывается аналогично. Из равенств $b_{i,j}b_{j,i}=a_i$, $b_{j,i}b_{i,j}=a_j$, следует, что $F^2(z(x,y)) = F(z(b_{i,j}y, b_{j,i}x)) = z(b_{i,j}b_{j,i}x, b_{j,i}b_{i,j}y) = z(a_i x, a_j y)$. Теорема 2 доказана.

## Литература


1. *Mayer T.F.* Mathematical Models of Group Structure, N.Y., 1975.
2. *Andpeeea Г.М., Богомолова Н.Н., Петровская Л А.* Современная социальная психология на Западе. М.: Изд-во МГУ, 1978.
3. *Шихирев П.Н.* Современная социальная психология США. М.: Наука, 1979.
4. *Паниотто В.И.* Структура межличностных отношений. Методика и математические методы исследования. Киев: Наук.думка, 1975. *3.Паповян С.С.* Математические методы в социальной психологии. М.: Наука, 1983.
6. *Sorensen A.B., Hallinan M.T.* A stochastic model for change in group structure //Sociol. Sci. Res. 1976. V.5, p.43-61.
7. *Hunter J.E.* Dynamic sociometry //J.Math.Sociol. 1978. V.6, p.87-138.
8. *Ковчегов В.Б.* Марковская модель взаимоотношений в малой группе и анализ групповых структур //Математические методы в социологических исследованиях. М.: Ин-т социол.исслед. АН СССР, 1984

9. *Ковчегов В.Б.* Сбалансированность и гипотеза максимальной неэргодичности для сообществ //Математическое моделирование социальных процессов. М.: Акад.общ.наук, 1989.
10. *W.HeiderF,* Attitudes and cognitive organization //J.Psychol. 1946. V.21. (January), p.107-112.
11. *\\.HeidcrF.* The psychology of interpersonal relations. N.Y., 1958.
12. *Cartwrigrt D., Harary F.* Structural balance: a generalization of Heider's theory //PsychoI.Rev. 1956. V.63, p.277-293.
13. *DavisJЛ.* Clustering and structural balance in graphs //Hum.Relat. 1967. V.20 p.181-188.
14. *Davis 1Л., Leinhardt S.* The structure of positive interpersonal relations in small groups //Sociological theories in progress. V.2. Boston, 1972, p.218-251.
15. *Ope O.* Теория графов. М.: Наука, 1968.